1

الجبر و التحليل الرياضي

Algebra 1 & Analysis 1

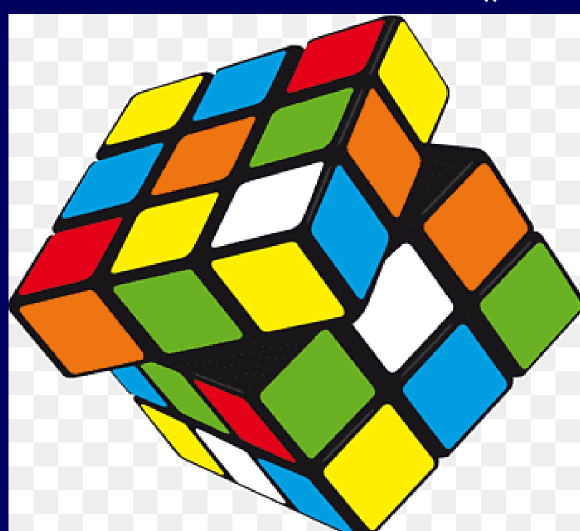
دروس وتمارين محلولة

Lessons and solved exercises in both Arabic and English

إعداد:

الأستاذ الدكتور براهيمي ابراهيم

الدكتورة عبدلي جيهان



مقياس الرياضيات للسنة الأولى علوم المادة حسب المقرر الوزاري

Mathematics module for the first year of Material Sciences according to the ministerial curriculum

جامعة محمد خيضر بسكرة

University Mohamed Khider Biskra

$Preface$ مقدمـــة

هذه الدروس مخصصة لطلاب السنة الأولى لقسم علوم المادة وفق المنهج المقدم من طرف الوزارة لمقياس الرياضيات للسنة الأولى من جبر وتحليل رياضي. هذا المقياس مقسم إلى جزئيين على سداسيين دراسيين حيث يدرس الطلبة في السداسي الأول مقياس رياضيات 1 وفي السداسي الثاني مقياس رياضيات 2، وتعد هذه المادة مادة أساسية تابعة للوحدة الأساسية التي لها معامل 3 ورصيد 6. يحتسب معدل هاته المادة بمجموع 33% من نقطة الأعمال التوجيهية و 67% من نقطة الامتحان المحروس في كل سداسي.

These lessons are intended for first-year students in the Material Sciences department, following the curriculum provided by the ministry for the Mathematics course in the first year of Algebra and Mathematical Analysis. This course is divided into two parts over two semesters, where students study Mathematics 1 in the first semester and Mathematics 2 in the second semester. This subject is a fundamental course belonging to the core unit, which has a coefficient of 3 and a credit of 6. The grade for this subject is calculated as 33% based on the total score of the coursework and 67% based on the score of the final exam for each semester.

يمكن أن تكون هذة الدروس تأسيسية للسنة الأولى وتمهيدية للسنة الثانية وتكون نقطة البداية لمزيد من التدريب في حساب التكاملات والمصفوفات وحل المعادلات التفاضلية. تمت كتابة هذه الدروس بطريقة واضحة وبسيطة لتحفيز الطلاب على تعلم المبادئ والمفاهيم الأساسية للجبر والتحليل الرياضي، في محاولة لتبسيط التعاريف والتفسيرات لطرق التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية، الذي يتطلب وصف الظاهرة الفيزيائية أو الكيميائية أو غيرها ومعرفة أشياء معينة حول هذه الظواهر، أو الملاحظات، أو العينات.

These lessons can be foundational for the first year and preparatory for the second year, serving as a starting point for further training in calculus, matrices, and solving differential equations. The lessons are written in a clear and simple manner to encourage students to learn the basic principles and concepts of algebra and mathematical analysis, in an attempt to simplify the definitions and explanations for differentiation, integration, and differential equations, which require describing physical, chemical, or other phenomena and knowing specific things about these phenomena, observations, or samples.

في هذه الدروس، قمنا بدمج أمثلة وتمارين تمت معالجتها بعناية. وبعض التمارين يمكن أن تتواجد في المواقع المختلفة تم التدقيق فيها وترجمتها للغة العربية، وينقسم هذا العمل إلى جزئيين، أولها مخصص للجبر والثاني للتحليل الرياضي في كل سداسي دراسي، حيث نتطرق في آخر كل فصل لسلسلة من التمارين المحلولة التي تساعد في تعميق وترسيخ المفاهيم.

In these lessons, we have carefully integrated examples and exercises. Some of the exercises can be found on various websites, which we have reviewed and translated into Arabic. This work is divided into two parts, the first of which is dedicated to algebra and the second to mathematical analysis in each semester. At the end of each chapter, we address a series of solved exercises that help to deepen and consolidate the concepts.

Contents الفهرس

الجزء الثاني : الجبـــــر 1 Part Two : Algebra 135

القسم الأول

الجزء الأول : التحليل الرياضي 1

Mathematical analysis 1

الفصل الأول

نظريات المجموعات *Sets theories*

فهرس الفصل

1.1 المجموعات *Sets*

1.1.1 تعاريف Definitions

سنحاول استكشاف خصائص المجموعات، دون التركيز على مثال مُعيّن. وسنكتشف سريعاً أن العلاقات بين المجموعات لا تقل أهمية عن المجموعات نفسها، وسيؤدي بنا هذا إلى مفهوم التطبيق (أو الدالة) بين مجموعتين.

We will try to explore the properties of sets without focusing on a specific example. We will quickly discover that the relationships between sets are no less important than the sets themselves, and this will lead us to the concept of a mapping (or function) between two sets.

1.1.1 : Definition - تعريف

المجموعة هي تجمّع من العناصر (أو الكائنات) المحددة بوضوح والتي تشترك في خاصيةٍ ما

A set is a collection of well-defined objects (or elements) that share a common property.

1.1.1 : Example - مثال

$$\{0,1\};\quad \{\text{أزرق } blue\text{، أحمر } red\};\quad \mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

Notations تسميات

1) نسمي مجموعة خالية نرمز لها بالرمز $\varnothing$ كل مجموعة لا تحتوي على أي عنصر.

We call an empty set denoted by $\varnothing$, every set does not contain any element.

2) نقول أن x عنصر من المجموعة E و نكتب $x \in E$ ، نفي هذه القضية أن العنصر x لا ينتمي للمجموعة E و نكتب $x \notin E$.

We say that x is an element of the set E and we write $x \in E$, the negation of this case that the element x does not belong to the set E and we write $x \notin E$.

3) هناك طرق أخرى لتكوين مجموعة، و هي تجميع عناصر معينة تربطهم خاصية مميزة.

There are other ways to form a set, which is to group certain elements that have a distinctive feature.

2.1.1 : Example - مثال

$$\{x \in \mathbb{R}, \quad |x-2| < 3\},$$
$$\left\{z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = 1\right\},$$
$$\{x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2].$$

2.1.1 الخاصية المميزة للمجموعة Distinguishing feature of set

2.1.1 : Definition - تعريف

تكون عناصر المجموعة مختلفة أي لا يوجد تكرار في عناصرها وقد تكون منتهية كما قد تكون غير منتهية.

The elements of the set are different, that is, there is no repetition in its elements, and it may be finite or infinite.

3.1.1 : Example - مثال

1) مجموعة نقاط المستوي — *The set of level points*

2) مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ — *The set of natural numbers* $\mathbb{N}$

3) المجموعة E المعرفة كما يلي — *The set E defined as follows*

$$E = \{e \in \mathbb{N},\ \ 0 \le e \le 20\}.$$

3.1.1 المجموعة الجزئية Subset

3.1.1 : Definition - تعريف

بالنسبة لمجموعتين A و E ، نقول أن A هي مجموعة جزئية من E إذا كان كل عنصر من A هو أيضا عنصر E. ونرمز لها بالرمز $A \subseteq E$ إذا كان لدينا $x \in E$ لكل $x \in A$.

For two sets A and E we say that A is a subset of E if each element of A is also an element of E. In formal notation $A \subseteq E$ if for all $x \in A$ we have $x \in E$.

ونكتب — *we write*

$$\boxed{A \subseteq E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E.}$$

حيث تتحقق لنا الخواص التالية

Where the following properties are achieved

1) $\phi \subset E.$

2) $E \subset E.$

إنطلاقا من المجموعة E نستطيع تكوين مجموعة جديدة عناصرها هي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة ونرمز لها بالرمز $\mathscr{P}(E)$.

Starting from the set E, we can create a new set whose elements are all the subsets of the set E and denote it by $\mathscr{P}(E)$.

4.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة

Let the set

$$E = \{1, 2, 3\},$$

فإن مجموعة أجزاء هذه المجموعة هي

The set of parts of this set is

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

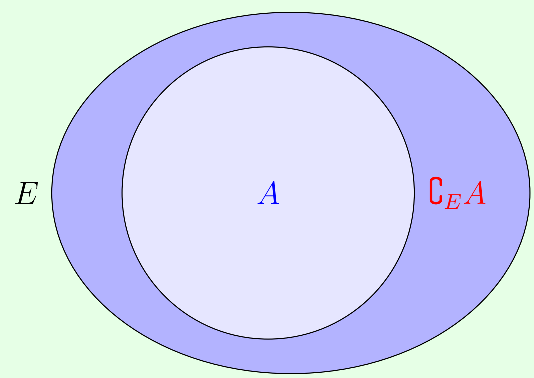
4.1.1 متممة مجموعة Complementary set

4.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة E، نسمي متممة المجموعة A في المجموعة E التي نرمز لها بالرمز $E \setminus A$ أو $\complement_E A$ ونكتب

Let the set A be a subset of the set E, we call the complement of the set A in the set E which we denote by $E \setminus A$, $\overline{A}$ or $\complement_E A$ and write

$$\boxed{\complement_E A = \left\{x \in E \mid x \notin A\right\}.}$$



5.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A حيث

Let the sets E and A where

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{2, 3\},$$

ومنه متممة المجموعة A في المجموعة E هي

then the complement of the set A in the set E is given

$$\overline{A} = \{1, 4, 5\}.$$

5.1.1 Difference of sets فرق المجموعات

5.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، نعرف فرق المجموعتين A و B الذي نرمز له بالرمز A/B أو $A-B$ ونكتب

Let the sets A and B two subsets of the set E, we know the difference of the two sets A and B which we denote by A/B or $A-B$ and write

$$\boxed{A/B = A - B = \{x \in A \text{ and } x \notin B\}.}$$

6.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A حيث

Let the set E and A where

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4, 5\}$$

then ومنه

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in A \text{ و } x \notin B\}, \\ &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

and و

$$B - A = \{x \in B \text{ and } x \notin A\}, \\ = \{4, 5\}$$

نلاحظ أن الفرق بين المجموعات ليس تبديلي

We note that the difference between the sets is not commutative.

6.1.1 : Definition - تعريف

الفرق التناظري بين مجموعتين A و B هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة واحدة فقط. الذي نرمز له بالرمز $A\Delta B$. ونكتب

The symmetric difference of two sets A and B is the set of objects that are in one and only one of the sets. The symmetric difference is written $A\Delta B$.

$$\boxed{A\Delta B = (A - B) \cup (B - A).}$$

7.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة E و A من المثال السابق ومنه

Let the sets E and A from the previous example, then

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) \\ = \{1, 2\} \cup \{4, 5\} \\ = \{1, 2, 4, 5\}$$

نلاحظ أن الفرق التناظري بين المجموعات تبديلي.

We note that the symmetric difference between the sets is commutative.

1.1.1 : Theorem - نظرية

لتكن المجموعة A و B مجموعتان جزئيتان من المجموعة E، فإن الفرق التناظري يمكن حسابه أيضا بالعلاقة التالية:

Let A and B be subsets of the set E, the symmetric difference can also be calculated with the *following relation:*

$$\boxed{A\Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)\,.}$$

6.1.1 العمليات على المجموعات Operations on sets

الإتحاد و التقاطع Union and intersection

7.1.1 : Definition - تعريف

لتكن المجموعة E و F مجموعتان.

Let E and F be two sets

1) نرمز لإتحاد المجموعتين E و F بالرمز $E \cup F$ ونكتب

We denote the union of the two sets E and F by $E \cup F$ and write

$$\boxed{E \cup F = \{x : x \in E \vee x \in F\}\,.}$$

يسمى الرمز $\vee$ بالفصل المنطقي و يقرأ (أو).

The symbol $\vee$ is called the logical separator and reads (or).

2) نرمز لتقاطع المجموعتين E و F بالرمز $E \cap F$ ونكتب

We denote the intersection of the two sets E and F as $E \cap F$ and write

$$\boxed{E \cap F = \{x : x \in E \wedge x \in F\}\,.}$$

يسمى الرمز $\wedge$ بالوصل المنطقي و يقرأ (و).

The symbol $\wedge$ is called a logical join and reads (and).

3) يمكن تعميم هذان التعريفان في حالة أكثر من مجموعتين و نرمز لتقاطع و اتحاد جملة من المجموعات E_i بالرمز $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ و $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ على الترتيب.

These two definitions can be generalized in the case of more than two sets, and we denote the intersection and union of a set of sets E_i by $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ and $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$, respectively.

Properties خـــــواص

لتكن A ، B **و** C **ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة** E، **لدينا الخواص التالية.**

Let A, B and C three subsets of the set E, we have the following properties.

1) **الخاصية التبديلية** — Commutative property

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2) **الخاصية التجميعية** — Associative property

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

3) **الخاصية التوزيعية** — Distributive property

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4) **خاصية المتمم** — Complement property

- $\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
- $\complement (\complement A) = A$
- $\complement A \cap A = \phi$
- $\complement A \cup A = E$

Cartesian product الجداء الديكارتي

8.1.1 : Definition - تعريف

الجداء الديكارتي هو اسم يطلق في الرياضيات لجداء مجموعتين E و F، ويرمز له بالرمز $F \times E$، أي مجموعة الأزواج المرتبة التي ينتمي عنصرها الأول إلى المجموعة E وينتمي عنصرها الثاني إلى المجموعة F. سمي كذلك نسبة إلى رينيه ديكارت الذي قام بتأسيس الهندسة التحليلية مطلقا هذا المفهوم من جداء المجموعات و نكتب

The Cartesian product is the mathematical term for the product of two sets E and F,

denoted by $E \times F$, which is the set of ordered pairs whose first element belongs to E and second element belongs to F. It is named after René Descartes who established the foundations of analytical geometry, introducing this concept of product of sets.
We can write it as

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in F\}.}$$

1.1.1 : Remark - ملاحظة

يمكن تعميم الجداء الديكارتي لأكثر من مجموعتين أو لجملة من المجموعات نرمز له عندها بالرمز $\prod_{i=1}^{n} E_i$ و نكتب

The Cartesian product can be generalized to more than two sets or to a collection of sets denoted by $\prod_{i=1}^{n} E_i$, which is the set of ordered n-tuples whose i-th element belongs to the set E_i. We can write it as:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in E_i, i = 1, ..., n\}.}$$

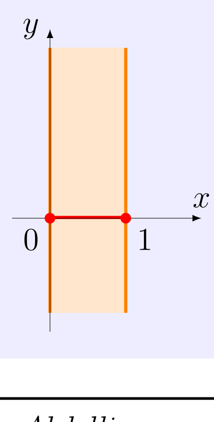
8.1.1 : Example - مثال

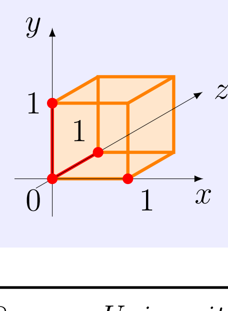
We have the following examples لدينا الأمثلة التالية

1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\big\}$ *the plane* المستوي

2) $[0, 1] \times \mathbb{R} = \big\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\big\}$

3) $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \big\{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\big\}$





Properties خـــواص

لتكن المجموعة A و B و C ثلاث مجموعات جزئية من المجموعة E، لدينا الخواص التالية.

Let the set A, B, and C three subsets of the set E, we have the following properties.

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ (1

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ (2

7.1.1 Set fragmentation تجزئة مجموعة

9.1.1 : Definition - تعريف

لتكن E مجموعة كيفية غير خالية و لتكن $E_1, ..., E_n$ مجموعات جزئية من E نقول أن $E_1, ..., E_n$ تشكل تجزئة للمجموعة E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية

Let E be a non-empty set and let $E_1, ..., E_n$ be subsets of E We say that $E_1, ..., E_n$ form a fragmentation of the set E if and only if the following conditions are met

$\forall i \in \{1, ..., n\} : E_i \neq \phi$ (1

$\forall i \neq j : E_i \cap E_j = \phi$ (2

$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$ (3

8.1.1 Finished set مجموعة منتهية

10.1.1 : Definition - تعريف

إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$. نسمي العدد n بأصلي المجموعة E و نكتب

If E is a finite set whose number of elements is $n \in \mathbb{N}$. We call the number n by the order *or cardinal number of a set E and write*

$$Card(E) = n$$

9.1.1 : Example - مثال

لتكن المجموعة

Let the set

$$E = \{1, 2, 3, 6, 9, 11\},$$

فإن أصلي المجموعة E هو

then, the cardinal number of the set E is

$$Card(E) = 6.$$

2.1.1 : Remark - ملاحظة

نقول عن مجموعة أنها غير منتهية إذا كانت تحتوي على عدد غير محدود من العناصر (أي غير معدودة).

We say that a set is infinite if it contains an unlimited number of elements.

Properties خـــواص

1) $Card(\phi) = 0.$

2) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

2.1.1 : Theorem - نظرية

إذا كانت المجموعة E مجموعة منتهية عدد عناصرها $n \in \mathbb{N}$ فإن عدد عناصر مجموعة أجزائها $\mathscr{P}(E)$ هو :

If the set E is a finite set whose number of elements is $n \in \mathbb{N}$, then the number of elements *of the set of its parts* $\mathscr{P}(E)$ *is:*

$$\boxed{Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^n.}$$

10.1.1 : Example - مثال

Let the set لتكن المجموعة

$$E = \{1, 2, 3\},$$

then: فإن :

$$\mathscr{P}(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3.$$

we remark that: نلاحظ أن :

$$Card(\mathscr{P}(E)) = 2^{Card(E)} = 2^3 = 8.$$

نسمي العلاقة الثنائية : التعبير عن العلاقة بين الأزواج أو أفراد هذه الثنائية المرتبة.

We call the binary relationship: the expression of the relationship between pairs or members of this ordered pair.

9.1.1 Definition of relationship تعريف العلاقة

11.1.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين، نعرف العلاقة الثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي لـ A و B و نرمز لها غالبا بالرمز $(\mathscr{R})$، من أجل كل ثنائية (x, y) نكتب :

Let A and B be sets, we define the binary relation from set A to set B as a subset of the Cartesian product of A and B and often denoted by $(\mathscr{R})$, for each binary (x, y) we write:

(1) $(x\mathscr{R}y)$ إذا كان x على علاقة مع y .

$(x\mathscr{R}y)$, if x is in relation to y.

(2) $(x\not\mathscr{R}y)$ إذا كان x ليس على علاقة مع y .

$(x\not\mathscr{R}y)$, if x is not related to y.

Relationship on set العلاقة على مجموعة

12.1.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين، إذا كانت $(\mathscr{R})$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإننا نسمي مجموعة A بمجموعة الانطلاق أو البداية للعلاقة، ونسمي مجموعة الثنائيات التي تحقق العلاقة بمدى العلاقة بمجموعة الوصول أو النهاية للعلاقة، وهي جزء من الجداء الديكارتي لـ A و B.

Let A and B be two sets. If $\mathscr{R}$ is a relation from the set A to the set B, then we call the set A the domain or the starting set of the relation, and we call the set of ordered pairs that satisfy the relation the range or the end set of the relation, which is a subset of the Cartesian product of A and B.

Inverse relationship العلاقة العكسية

13.1.1 : Definition - تعريف

لتكن $(\mathscr{R})$ العلاقة المعرفة من المجموعة A نحوالمجموعة B فإننا نعرف معكوس $(\mathscr{R})$ أو العلاقة العكسية ونرمز لها بالرمز $(\mathscr{R}^{-1})$ ونعرف على أنها علاقة من المجموعة B نحوالمجموعة A.

Let $(\mathscr{R})$ be a relation defined from set A to set B. We define the inverse $(\mathscr{R}^{-1})$ of $\mathscr{R}$ as a relation from set B to set A.

11.1.1 : Example - مثال

Find the inverse of the relationship أوجد معكوس العلاقة

$$\mathscr{R} = \{(1, y), (1, z), (3, x)\}$$

من المجموعة $A = \{1, 2, 3\}$ نحو المجموعة $B = \{x, y, z\}$. العلاقة العكوسة هي

From the set $\{1, 2, 3\} = A$ towards the set $\{x, y, z\} = B$. The inverse relationship is

$$\begin{aligned} \mathscr{R}^{-1} \quad &: \quad B \longrightarrow A \\ &= \quad \{(y, 1), (z, 1), (x, 3)\} \end{aligned}$$

10.1.1 خواص العلاقات Relationship properties

الخاصية الإنعكاسية Reflexive property

لتكن E مجموعة كيفية و لتكن الثنائية (x, y) حيث: $x \in E$ و $y \in E$، ولتكن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة معرفة في المجموعة E. نعرف الخواص التالية:

Let E be a qualitative set and let the binary (x, y) where: $x \in E$ and $y \in E$, and let $(\mathscr{R})$ be a relation defined in the set E . We define the following properties:

تعريف - Definition : 14.1.1

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة إنعكاسية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is a reflexive relation if the condition is met

$$\boxed{\forall x \in E : x\mathscr{R}x.}$$

الخاصية التناظرية Symmetric property

تعريف - Definition : 15.1.1

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تناظرية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is a symmetric relation if the condition is met

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E : x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x.}$$

الخاصية ضد التناظرية Antisymmetric property

تعريف - Definition : 16.1.1

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة ضد تناظرية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is an antisymmetric relation if the condition is met

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E : (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Longrightarrow x = y.}$$

Transitive property الخاصية المتعدية

17.1.1 : Definition - تعريف

و نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة متعدية إذا تحقق الشرط

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is a transitive relation if the condition is met

$$\boxed{\forall(x,y,z)\in E\times E\times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z.}$$

11.1.1 Equivalence relationship علاقة التكافؤ

نعرف الآن علاقتين أساسيتين هما علاقة التكافؤ وعلاقة الترتيب

We define now two basic relationships, the equivalence and the order relationship

18.1.1 : Definition - تعريف

نقول عن العلاقة $(\mathscr{R})$ أنها علاقة تكــــافؤ إذا تحقق ما يلي

We say about the relation $(\mathscr{R})$ that it is an equivalence relation if the following is true

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية. — *$(\mathscr{R})$ is a reflexive relation.*

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة تناظرية. — *$(\mathscr{R})$ is a symmetric relation.*

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية. — *$(\mathscr{R})$ is a transitive relation.*

12.1.1 : Example - مثال

(1) علاقة $(=)$ على أي مجموعة هي علاقة تكافؤ.

The $(=)$ relation on any set is an equivalence relation.

(2) علاقة التوازي على مجموعة المستقيمات هي علاقة تكافؤ.

The relation of parallelism on the set of straight lines is an equivalence relation.

(3) علاقة التعامد على مجموعة المستقيمات هي ليست علاقة تكافؤ.
The relation perpendicular to the set of straight lines is not an equivalence relation.

الفكرة العامة وراء علاقة التكافؤ أنها تصنف العناصر المتشابهة بشكل ما.

The general idea behind the equivalence relation is that it classifies elements that are similar in some way.

3.1.1 : Remark - ملاحظة

في الرياضيات، تُقسِّم علاقة التكافؤ المجموعة إلى فئات التكافؤ، حيث تكون كل فئةٍ منها مجموعةً جزئيةً من المجموعة الأصلية تتألف من جميع العناصر المتكافئة مع بعضها البعض بموجب تلك العلاقة. وتشكّل فئات التكافؤ هذه تجزئة للمجموعة الأصلية، أي أنها غير فارغة، ومنفصلة زوجيًا (أي لا يتقاطع أي اثنين منها)، ويُشكِّل اتحادها المجموعة الأصلية بأكملها.

*In mathematics, an equivalence relation partitions a set into **equivalence classes**, where each equivalence class is a subset of the original set consisting of all elements that are equivalent to each other under the relation. These equivalence classes form a **partition** of the original set, meaning that they are non-empty, pairwise disjoint (i.e., any two distinct classes are disjoint), and their union is the entire original set.*

Equivalence class صنف التكافؤ

19.1.1 : Definition - تعريف

لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة تكافؤ في المجموعة E و ليكن $a \in E$.
Let $(\mathscr{R})$ be an equivalence relation in the set E and let $a \in E$.
نعرف صنف تكافؤ العنصر a الذي نرمز له بالرمز $\dot{a}$ كما يلي
We define the equivalence class of the element a denoted by $\dot{a}$ as follows

$$\boxed{\dot{a} = \{x \in E : x\mathscr{R}a\}}$$

13.1.1 : Example - مثال

العلاقة التالية :

The following relationship:

$$\forall x, y : x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

هي علاقة تكافؤ.

It is an equivalence relationship.

ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.

Let $x \in \mathbb{R}$. We are looking for the y an elements of $\mathbb{R}$ where $x\mathscr{R}y$.

يجب أن نجد حلول المعادلة $x^2 - y^2 = x - y$ في (y) . حيث يمكن كتابتها على الشكل:

We have to find the solutions to the equation $x^2 - y^2 = x - y$ in (y). Where it can be written in the form:

$$(x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

حلولها هي $y = x$ و $y = 1 - x$.

Its solutions are $y = x$ and $y = 1 - x$.

ومنه صنف تكافؤ العنصر x هو $\{x, 1 - x\}$. يتكون من عنصرين ، ما لم يكن $x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة صنف التكافؤ هو المجموعة $\{1/2\}$.

Hence the class of element valence x is $\{x, 1 - x\}$. consisting of two elements, unless $x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1/2$. In this case the class of equivalence is the set $\{1/2\}$.

12.1.1 علاقة الترتيب Ranking relationship

نظرية الترتيب هي فرع من فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة الأنواع المختلفة من العلاقات الثنائية التي تعطي بنية ترتيبية يمكن القول من خلالها متى يكون أي عنصر أقل من أو يسبق العنصر الآخر.

Order theory is a branch of mathematics that focuses on studying the various types of binary relations that give rise to a structural ordering, which can be used to determine when any given element is less than or precedes another element.

20.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

We say that the relation $(\mathscr{R})$ is a ordering relation on the set E if the following is satisfied:

(1) $(\mathscr{R})$ علاقة إنعكاسية. — *$(\mathscr{R})$ is a reflexive relation.*

(2) $(\mathscr{R})$ علاقة ضد تناظرية. — *$(\mathscr{R})$ is an asymmetric relation.*

(3) $(\mathscr{R})$ علاقة متعدية. — *$(\mathscr{R})$ is a transitive relation.*

في حالة تزويد المجموعة بعلاقة ترتيب. فنقول أن المجموعة مرتبة منتهية إذا كانت منتهية عند إذ يمكن تمثيلها بيانيا في شكل رسم تخطيطي هاس Hasse، على غرار التمثيل البياني المعتاد على الورق، ما يمكن من العمل بسهولة عليها. أما إذا كانت المجموعة غير منتهية فإنه يمكن تمثيل جزء منها فقط.

In the case of equipping a set with an ordering relation, we say that the set is a finite partially ordered set if it is finite and can be represented graphically in the form of a Hasse diagram, similar to the usual graphical representation on paper, which makes it easy to work with. However, if the set is infinite, only a part of it can be represented.

مثال - Example : 14.1.1

العلاقة المعروفة «أصغر من أو يساوي» في $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ هي علاقة ترتيب :

The relation "less than or equal to" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, and $\mathbb{R}$ is an ordering relation.

- إنعكاسية — *Reflexive*

$$\forall x : x \leq x,$$

- ضد تناظرية — *Asymmetric*

$$\forall x, y : x \leq y \text{ و } y \leq x \Longrightarrow x = y,$$

- متعدية — *Transitive*

$$\forall x, y, z : x \leq y \text{ و } y \leq z \Longrightarrow x \leq z.$$

مثال - Example : 15.1.1

في نظرية المجموعات، فإن علاقة الإحتواء $\subset$ هي علاقة ترتيب في المجموعة $\mathscr{P}(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E :

In set theory, the inclusion relation $\subset$ is a order relation on the set $\mathscr{P}(E)$, the set of all subsets of E.

- إنعكاسية *Reflexive*

$$\forall A \subset \mathscr{P}(E) : A \subset A,$$

- ضد تناظرية *Asymmetric*

$$\forall A, B \subset \mathscr{P}(E) : A \subset B \text{ and } B \subset A \Longrightarrow A = B,$$

- متعدية *Transitive*

$$\forall A, B, C \subset \mathscr{P}(E) : A \subset B \text{ and } B \subset C \Longrightarrow A \subset C.$$

13.1.1 علاقة الترتيب الكلي Total order relation

لتكن $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب في المجموعة E.

Let $(\mathscr{R})$ be a relation of order on the set E.

21.1.1 : Definition - تعريف

نقول أن العلاقة $(\mathscr{R})$ علاقة ترتيب كلي في المجموعة E إذا تحقق ما يلي

We say that the relation $(\mathscr{R})$ is a total order relation in the set E if the following conditions are satisfied:

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times E : (x\mathscr{R}y \vee y\mathscr{R}x).}$$

16.1.1 : Example - مثال

علاقة الإحتواء $\subset$ بين المجموعات الجزئية للمجموعة E ليست علاقة ترتيب كلي على $\mathscr{P}(E)$. هناك مجموعات بحيث لا يتم إحتواء الأول في الثانية ، ولا إحتواء الثانية في الأولى. على سبيل المثال

The inclusion relation $\subset$ between the subsets of the set E is not a total order relation on

$\mathscr{P}(E)$, as there exist pairs of subsets that are neither contained in each other. For example,

$$A + [1,3] \not\subset B = [0,2] \text{ and } [0,2] \not\subset [1,3].$$

لا يمثل A مجموعة جزئية من B ، ولا يمثل B مجموعة جزئية من A ، مما يعني أن علاقة التضمين بين A و B ليست علاقة ترتيب إجمالي.

Neither A is a subset of B, nor is B a subset of A, which means that the inclusion relation between A and B is not a total order relation.

17.1.1 : Example - مثال

نزود $\mathbb{R}^2$ بالعلاقة $\prec$ المعرفة:

We provide $\mathbb{R}^2$ with the relation $\prec$ defined as:

$$(x,y) \prec (x',y') \iff x \leq x' \text{ and } y \leq y'.$$

العلاقة $\prec$ تحدد علاقة ترتيب على $\mathbb{R}^2$. لكن هذا الترتيب ليس كلي لأنها لا يمكن أن نقارن بين $(0,1)$ و $(1,0)$.

The relation $\prec$ defines a partial order on $\mathbb{R}^2$. However, this order is not total because we cannot compare between $(0,1)$ and $(1,0)$.

2.1 *Mappings* التطبيقات

1.2.1 Definitions تعاريـــف

Definition of mapping تعريـــف التطبيق

22.2.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين . نقول أننا عرفنا تطبيقا f من A نحو B إذا عرفنا علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من B. ونكتب:

Let A and B be two non-empty sets. We say that we have defined a mapping f from A to B if we have established a relationship that connects each element x from A to a unique *element y from B. We write this as:*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

أو

or

$$\boxed{f(Mapping,\ \text{تطبيق}) \iff (\forall x \in A)(\exists! y \in B) : y = f(x)}$$

- y يُسمى صورة x بالتطبيق f.
  y is called the image of x under the mapping f.
- x يُسمى سابق y بالتطبيق f.
  x is called the preimage of y under the mapping f.
- المجموعة A تُسمى مجموعة الإنطلاق.
  The set A is called the domain of the mapping.
- المجموعة B تُسمى مجموعة الوصول أو المدى المرافق.
  *The set B is called the **codomain** of the mapping.*

4.2.1 : Remark - ملاحظة

(1) يكون f تطبيق من A نحو B $\iff$ كل عنصر x من A له صورة وحيدة في B .
f is a mapping from A to B if and only if every element x in A has a unique image in B.

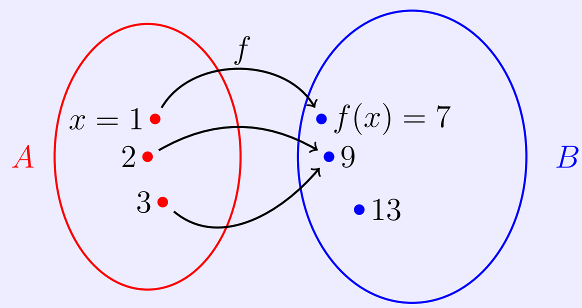
(2) إذا كان f تطبيق من A نحو B فإنه يُمكن أن يكون للعنصر y من B أكثر من سابقة في A.
If f is a mapping from A to B, then an element y in B may have more than one preimage in A.

(3) يجب التفريق بين $f(x)$ و f : لدينا $f(x) \in B$، بينما f تمثل التطبيق ككل، وهي تنتمي إلى فضاء التطبيقات المعرفة من A نحو B .
It is important to distinguish between $f(x)$ and f. We have that $f(x) \in B$, while f represents the mapping as a whole, which belongs to the set of all mappings from A to B.

18.2.1 : Example - مثال

We have لدينا

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad \textit{and} \qquad B = \{7, 9, 13\}.$$



- و منه *then*

$$f(1) = 7; f(2) = 9; f(3) = 9.$$

- f تطبيق من A نحو B لكل عنصر x من A له صورة وحيدة في B.
f is a mapping from A to B such that every element x in A has a unique image in B.

- في هذه الحالة العنصر 13 ليس لها سابقة وفق التطبيق f .
In this case, the element 13 in B does not have a preimage in A under the mapping f.

- في هذه الحالة العنصر 9 لها سابقتان : 2 و 3.
In this case, the element 9 in B has two preimages in A: 2 and 3.

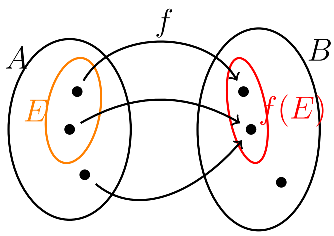
Direct and inverse image الصورة المباشرة و العكسية

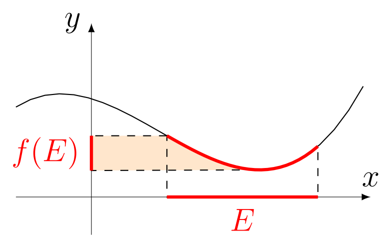
23.2.1 : Definition - تعريف

لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن E مجموعة جزئية من A، وليكن $f : A \to B$ تطبيق.
Let A and B be two non-empty sets. Let E be a subset of A, and let $f : A \to B$ be a function.

نعرف الصورة المباشرة للمجموعة E بواسطة التطبيق f المجموعة:
We define the direct image (or forward image) of the set E under the function f as follows:

$$\boxed{f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}}$$





24.2.1 : Definition - تعريف

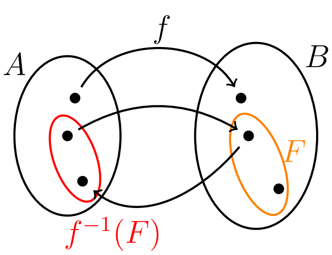
لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين. ولتكن F مجموعة جزئية من B، ولتكن $f : A \to B$ تطبيق. نعرف الصورة العكسية للمجموعة F بواسطة التطبيق f المجموعة:

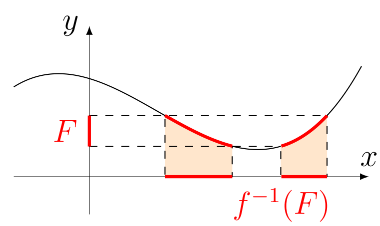
Let A and B be non-empty sets. Let F be a subset of B, and let $f : A \to B$ be a function. We define the inverse image, or preimage, of F under the function f to be the set:

$$\boxed{f^{-1}(F) = \{x \in A \mid f(x) \in F\}}$$

بمعنى آخر ، $f^{-1}(F)$ هي مجموعة كل العناصر في A التي ترتبط بعنصر في F وفق الدالة f.

In other words, $f^{-1}(F)$ is the set of all elements in A that map to an element in F under the function f.





5.2.1 : Remark - ملاحظة

لدينا المفاهيم التالية

We have the following concepts

- المجموعة $f(E)$ مجموعة جزئية من المجموعة B ، $f^{-1}(F)$ مجموعة جزئية من المجموع A.
  The set $f(E)$ is a subset of the set B, and $f^{-1}(F)$ is a subset of the set A.

- الصورة المباشرة للعنصر $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ هي صورة مجموعة مفردة تحتوي عنصر واحد. من ناحية أخرى ، فإن الصورة العكسية لـ $f^{-1}(\{y\})$ تعتمد على f. يمكن أن تكون مجموعة مفردة،

أو مجموعة مكونة من عدة عناصر أو حتى المجموعة الفارغة (إذا لم تكن هناك صورة من f تساوي y).

The direct image of the element $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ is a singleton set containing a single element. On the other hand, the inverse image of $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ depends on the function f. It can be a singleton set, a set consisting of several elements, or even the empty set (if there is no preimage of y under f).

2.2.1 التطبيق الغامر Surjective function

25.2.1 : Definition - تعريف

نقول إن f تطبيق غامر إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة على الأقل في A. و نكتب:

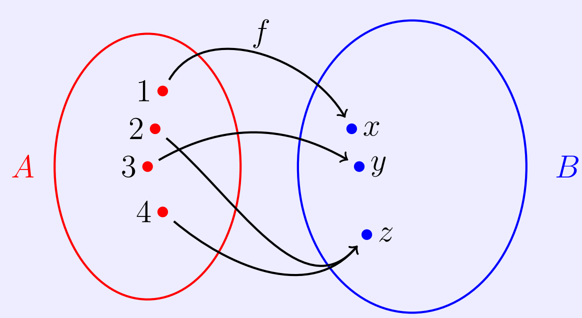
We say that f is a surjective function if and only if every element y in B has at least one pre-image in A. We can write this as:

$$\boxed{f(\textit{Surjective function},\ \text{تطبيق غامر}) \iff (\forall y \in B, \exists x \in A)\ :\ y = f(x).}$$

19.2.1 : Example - مثال

We have لدينا

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad \textit{and} \qquad B = \{x, y, z\}.$$



- *We have* لدينا

$$f(1) = x; f(3) = y; f(4) = \{y, z\}.$$

- f تطبيق من A نحو B كل عنصر من A له صورة وحيدة في B.

f is a function from A to B if and only if every element of A has a unique image in B.

- f تطبيق غامر من A نحو B لأن كل عنصر من B له سابقة على الأقل في A.

f is a surjective function from A to B because every element of B has at least one pre-image in A.

3.2.1 التطبيق المتباين Injective function

26.2.1 : Definition - تعريف

نقول أن التطبيق f متباين إذا وفقط إذا كان كل عنصر y من B له سابقة واحدة على الأكثر في A ونكتب:

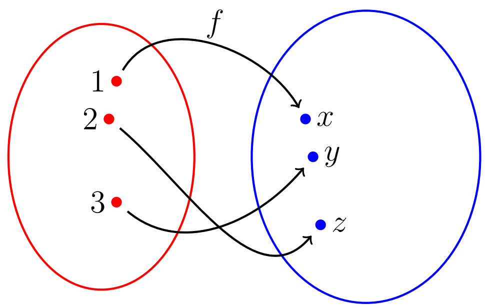
We say that the function f is injective if and only if every element y in B has at most one pre-image in A, and we write:

$$\boxed{f(\textit{Injective function, } \text{تطبيق متباين}) \iff \forall(x,y)\in A^2:(f(x)=f(y)\Rightarrow x=y).}$$

20.2.1 : Example - مثال

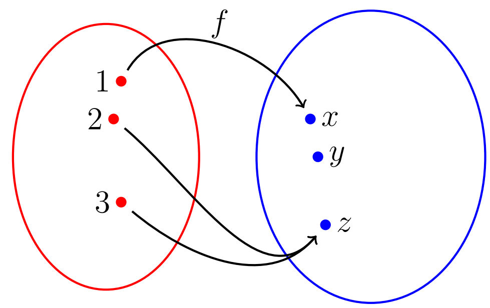
خير مثال على التطبيق المتباين هو رقم الضمان الاجتماعي: فشخصان مختلفان حتما لديهما دائما رقم ضمان اجتماعي مختلف ... التطبيق الذي يربط الشخص برقم الضمان الاجتماعي الخاص به هو تطبيق متباين، من ناحية أخرى ، هناك العديد من الأشخاص الذين ولدوا مثلا في 31 من شهر مارس 1978. لهذا التطبيق الذي يربط الشخص بتاريخ ميلاده ليس متباين.

A good example of an application that uses unique identification is the Social Security number. Two different individuals will always have different Social Security numbers. The application that links a person to their specific Social Security number is a unique identification application. On the other hand, there are many individuals who were born, for example, on March 31, 1978. For this application that links a person to their date of birth, it is not a unique identification application.



تطبيق متباين

Injective function



تطبيق ليس متباين

Not injective function.

Properties خواص

- التطبيق $f : X \to Y$ متباين إذا وفقط إذا كان X المجموعة الخالية أو يوجد تطبيق $g : Y \to X$ حيث $g \circ f$ يساوي التطبيق المحايد على X.

The application $f : X \to Y$ is injective if and only if X is the empty set, or if there exists an application $g : Y \to X$ such that $g \circ f$ is equal to the identity application on X.

- يكون التطبيق f تقابلي إذا وفقط إذا كان متباين و غامر معا.

The function f is bijective if and only if it is both injective and surjective.

- إذا كان التطبيق $f \circ g$ متباين فإن f متباين.

If the composite function $g \circ f$ is injective, then f is injective.

- إذا كان f و g تطبيقان متباينان فإن التركيب $f \circ g$ متباين.

If f and g are injective functions, then the composite function $g \circ f$ is injective.

- $f : X \to Y$ متباين إذا وفقط إذا كان من أجل كل التطبيقات $g, h : W \to X$، إذا كان $f \circ g = f \circ h$ فإن $g = h$.

The function $f : X \to Y$ is injective if and only if, for all functions $g, h : W \to X$, if $f \circ g = f \circ h$, then $g = h$.

- إذا كان $f : X \to Y$ متباين و A مجموعة جزئية من X فإن $f^{-1}(f(A)) = A$. وبالتالي A يمكن ايجادها باستعمال الصورة العكسية لـ $f(A)$.

If $f : X \to Y$ is a surjective function and A is a subset of X, then $f^{-1}(f(A)) = A$. Therefore, A can be found using the inverse image of $f(A)$.

- إذا كان $f : X \to Y$ متباين و A و B مجموعات جزئية من X فإن $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

If $f : X \to Y$ is injective and A and B are subsets of X, then $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

- كل تطبيق $h : W \to Y$ يمكن أن يكتب على الشكل $h = f \circ g$ من أجل f متباين و g غامر.

Every function $h : W \to Y$ can be written in the form $h = f \circ g$ for a injective function f and a surjective function g.

- إذا كان $f : X \to Y$ تطبيق متباين فإن Y يحتوي على عدد من العناصر على الأقل مماثل لعدد عناصر X.

If $f : X \to Y$ is a surjective function, then Y has at least as many elements as X.

4.2.1 التطبيق التقابلي Bijective function

27.2.1 : Definition - تعريف

نقول إن f تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان متباينا و غامرا معا، أي إذا كان لكل عنصر y من B سابقة وحيدة في A. ونكتب:

We say that f is a bijective function if and only if it is both injective and surjective, that is, if each element y in B has a unique predecessor in A. We write:

$$\boxed{f\left(\textit{Bijective},\ \text{تقابلي}\right) \iff (\forall y \in B), (\exists! x \in A) : y = f(x).}$$

21.2.1 : Example - مثال

ليكن التطبيق $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف $f(x)=2x+1$. هذا التطبيق تقابلي، لأن من أجل أي عدد حقيقي y، بمكننا إيجاد حل حقيقي واحد للمعادلة $y=2x+1$ للمتغير x وهو $x=(y-1)/2$.

Let the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=2x+1$. This function is bijective because for any real number y, we can find a unique real solution to the equation $y=2x+1$ for the variable x, which is $x=(y-1)/2$.

5.2.1 Composite applications تركيب التطبيقات

نعتبر التطبيقين :

We consider two applications:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} g: G &\to H \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

إذا كان $g(G)\subset A$ نعرف التطبيق $f\circ g$ كما يلي :

If $g(G)\subset A$ we define the application $f\circ g$ as follows:

$$\begin{aligned} f\circ g: G &\to B \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

6.2.1 : Remark - ملاحظة

نلاحظ أنه لا بمكننا أن نتكلم عن $f(g(x))$ حتى يكون $g(x)\in A$، لهذا فإن الشرط $g(G)\subset A$ يعتبر أساسيا حتى يكون للتطبيق $f\circ g$ معنى.

We note that we cannot speak about $f(g(x))$ until $g(x)\in A$, so the condition $g(G)\subset A$ is essential for the composition $f\circ g$ to have a meaning.

6.2.1 Inverse application التطبيق العكسي

28.2.1 : Definition - تعريف

ليكن f تطبيقا تقابليا من A نحو B

Let f be a bijective mapping from A to B

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

نعرف التطبيق العكسي لـ f كما يلي :

We define the inverse application of f as follows:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

ليكن $y \in B$، بما أن f تقابل من A نحو B فإنه يوجد x وحيد من A بحيث : $y = f(x)$، لدينا :

Let $y \in B$. Since f is a bijection from A to B, there exists a unique $x \in A$ such that $y = f(x)$. Therefore, we have:

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

7.2.1 : Remark - ملاحظة

إذا كان f تقابل من A نحو B فإن f^{-1} تقابل من B نحو A ولدينا:

If f is a bijection from A to B, then f^{-1} is a bijection from B to A, and we have:

$$\begin{aligned} \forall x &\in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x, \\ \forall y &\in B, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y. \end{aligned}$$

22.2.1 : Example - مثال

كما بينا سابقا لدينا التطبيق التالي تقابل

As we previously mentioned, we have the following bijection:

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

and its inverse application is as follows: و تطبيقه العكسي هو التالي :

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0,+\infty[\ &\to [0,+\infty[\\ x \ &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

8.2.1 : Remark - ملاحظة

ليكن $y \in B$. لا يمكننا التكلم عن $f^{-1}(y)$ حتى يكون التطبيق f تقابلا من A نحو B.
Let $y \in B$. We cannot talk about $f^{-1}(y)$ unless f is a bijection from A to B. بينما إذا كان $K \subset B$ يمكننا دائما التكلم عن $f^{-1}(K)$ حتى و إن لم يكن التطبيق تقابلا .
If $K \subset B$, we can always talk about $f^{-1}(K)$ even if the function f is not invertible.

7.2.1 Equals two applications تساوي تطبيقين

Let the two applications: ليكن التطبيقين:

$$\begin{aligned} f : A \ &\to \ B \\ x \ &\mapsto \ y = f(x) \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} g : E \ &\to \ F \\ x \ &\mapsto \ y = g(x) \end{aligned}$$

We say that $f = g$ if and only if نقول أن $f = g$ إذا وفقط اذا كان

$$f = g \iff \begin{cases} A = E, \ B = F \\ \forall x \in A \ : \ f(x) = g(x) \end{cases}$$

23.2.1 : Example - مثال

Let the two applications ليكن التطبيقين

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \ &\to \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$$

and و

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \ &\to \mathbb{R} \\ x \ &\mapsto 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

من العلاقات المثلثية نجد أن : $f = g$.

From the trigonometric relations we find that: $f = g$.

3.1 البرهان بالتراجع Retreating evidence

إن مبدأ البرهان بالتراجع يجعل من الممكن إثبات أن القضية $P(n)$ ، صحيحة اعتمادا على كل $n \in \mathbb{N}$. و تمر طريقة البرهان بالتراجع بثلاث خطوات:

The principle of proof by induction makes it possible to prove that the statement $P(n)$ is true for every $n \in \mathbb{N}$. The proof by induction proceeds in three steps: retreating evidence, base case, and inductive step.

الخطوة الأولى، نثبت $P(0)$.

First step, we set $P(0)$.

بالنسبة للخطوة الثانية، نفترض $n \geq 0$ المعطاة بـ $P(n)$ صحيحة ثم نثبت أن القضية $P(n)$ في المرتبة التي تليها صحيحة.

For the second step, we assume that the given statement $P(n)$ is true for some $n \geq 0$ and then prove that the statement $P(n+1)$ is also true.

في الأخير نكون قد برهنا بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

In the end, we have proven by induction that the statement $P(n)$ is true for all $n \in \mathbb{N}$.

مثال - Example : 24.3.1

لنثبت أن:

Let's prove that:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n.$$

من أجل $n \geq 0$ نضع $P(n)$ القضية التالية :

For $n \geq 0$ we set $P(n)$ the following case:

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \equiv 2^n > n.$$

سوف نثبت بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \geq 0$.

We will prove backwards that the case $P(n)$ is true for all $n \geq 0$.

First step **الخطوة الأولى**

من أجل $n=0$ لدينا $2^0=1>0$. ومنه $P(0)$ محققة.

for $n=0$ we have $2^0=1>0$. From which $P(0)$ is realized.

Second step **الخطوة الثانية**

ليكن $n\geq 0$. نفرض أن $P(n)$ محققة ولنثبت أن $P(n+1)$ محققة.

Let $n\geq$ be0. Let's say that $P(n)$ is true and let's prove that $P(n+1)$ is true.

$$2^{n+1}=2^n+2^n>n+2^n>n+1 \quad and \quad P(n)\Longrightarrow 2^n>n.$$

From which $P(n+1)$ is realized. ومنه $P(n+1)$ محققة.

أثبتنا بالتراجع أن القضية $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n\geq 0$ أي:

We have proven by induction that the statement $P(n)$ is true for all $n\geq 0$, i.e.

$$\forall n\in\mathbb{N}: P(n)\equiv 2^n>n.$$

4.1 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 1*

تمرين رقم – Exercise N°– 1

اكتب بالتفصيل (أي بإعطاء كل عناصر) المجموعات التالية:

Write in detail (i.e., by providing all elements) the following sets:

1) $A=\{$*integers between* 2π و $\sqrt{2}$ أعداد صحيحة بين$\}$.

2) $B=\left\{x\in\mathbb{Q};\ \exists(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ x=\frac{p}{n} \ \text{ and } \ 1\leq p\leq 2n\leq 7\right\}$.

الحـل : Solution

لدينا

$$A=\{2,3,4,5,6\}.$$

لكتابة B ، نلاحظ أن

$$1/2\leq n\leq 7/2\Rightarrow n=1,2 \text{ أو } 3.$$

لكل قيمة محتملة لـ n ، نكتب القيم المحتملة لـ p ، ونحصل على:

$$B = \left\{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}.$$

نلاحظ أنه لم نكتب عدة مرات 1 ، والتي تم الحصول عليها أيضا بـ $2/2$ و $3/3$ ، ولا عدة مرات 2، والتي حصلنا عليها بـ $2/1$ و $4/2$ و $6/3$.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

إذا كان لدينا $C \subset A \cup B$ فهل : لأن $C \subset A$ أو $C \subset B$ ؟

If we have $C \subset A \cup B$ does that mean $C \subset A$ or $C \subset B$?

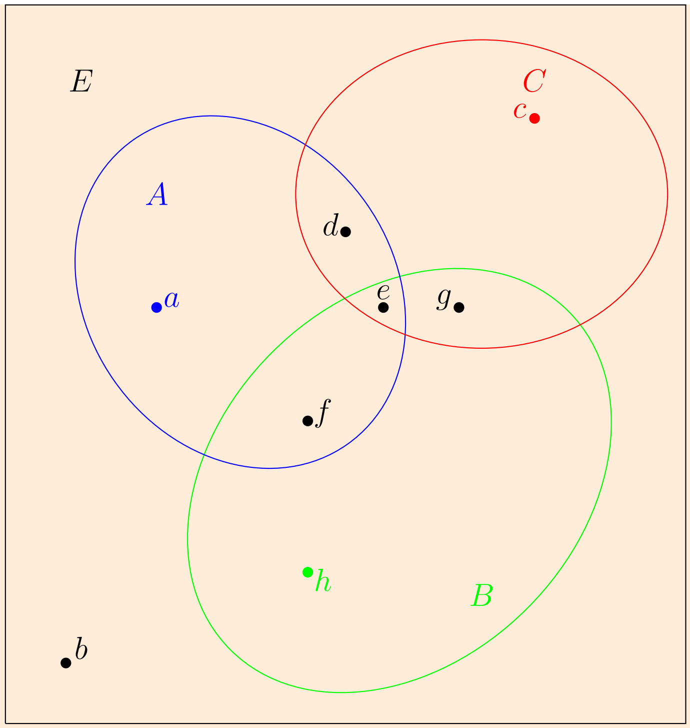
Solution : الحـــل

لا! نأخذ مثلا $A = \{1, 2\}$، $B = \{3, 4\}$ و $C = \{2, 3\}$.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

نأخذ في الاعتبار مخطط فين التالي ، الذي يحتوي على ثلاثة مجموعات جزئية A, B, C من المجموعة E و العناصر a, b, c, d, e, f, g, h من E.

We consider the following Venn diagram, which contains three partial sets A, B, and C of the set E, and the elements a, b, c, d, e, f, g, h from E.



حدد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة:

Determine whether the following statements are true or false:

1) $g \in A \cap \bar{B}$ **2)** $g \in \bar{A} \cap \bar{B}$. **3)** $g \in \bar{A} \cup \bar{B}$.
4) $f \in \bar{A}$. **5)** $e \in \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. **6)** $\{h, b\} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
7) $\{a, f\} \subset A \cup C$.

Solution : الحــل

1) **خطأ لأن** $g \in B$ **وبالتالي** $g \notin \overline{B}$.

2) **خطأ لنفس السبب.**

3) **صحيح لأن** $g \in \overline{A}$.

4) **خطأ لأن** $f \in A$.

5) **خطأ لأن** $e \in A$.

6) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $h \notin \overline{A} \cap \overline{B}$ **و** $b \in \overline{A} \cap \overline{B}$ **: و هذا خطأ.**

7) **يرجع هذا إلى إثبات أن** $a \in A \cup C$ **و** $f \in A \cup C$**: و هذا صحيح.**

تمرين رقم – 4 – Exercise N°

لتكن B, A و C ثلاث مجموعات حيث $A \cup B = B \cap C$.

Let B, A and C be three sets where $A \cup B = B \cap C$.

أثبت أن $A \subset B \subset C$.

Prove that $A \subset B \subset C$.

الحــل : Solution

ليكن $x \in A$. ومنه $x \in A \cup B$ ، وبالتالي $x \in B \cap C$، أي أن، $x \in B$ ، وبالتالي $A \subset B$.
الآن نأخذ $x \in B$. ومنه $x \in A \cup B$ ، وبالتالي $x \in B \cap C$، أي أن ، $x \in C$ ، وبالتالي $B \subset C$.

تمرين رقم – 5 – Exercise N°

لتكن B, A و C ثلاثة مجموعات جزئية من المجموعة E. من أجل $X \subset E$ ، نرمز بالرمز X^c إلى متممة X في E.

Let B, A and C be three subsets of the set E. For $X \subset E$, we denote by X^c the complement of X in E.

Prove the following Morgan's laws: أثبت قوانين مورغان التالية:

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **2.** $(A^c)^c = A$

3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ **4.** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

الحــل : Solution

في كل مرة سنبرهن بالإحتواء المزدوج.

1) ليكن $x \in (A \cap B) \cup C$، ومنه $x \in A$ و $x \in B$ أو $x \in C$. إذا كان $x \in A$ و $x \in B$ ، فإن $x \in A \cup C$ و $x \in B \cup C$ ، ويتم إثبات الإحتواء. بخلاف ذلك ، يكون $x \in C$ فقط ، وفي هذه الحالة لدينا أيضا $x \in A \cup C$ و $x \in B \cup C$.

بالمقابل ، إذا كان $x \in A \cup C$ و $x \in B \cup C$ ، فإننا نميز بين حالتين: إذا كان $x \in C$ ، ومنه $x \in (A \cap B)$ أو $x \in C$ وبالتالي $x \in (A \cap B) \cup C$. خلاف ذلك ، $x \notin C$. ولكن ، بما أن $x \in A \cup C$، يصبح لدينا $x \in A$. وبالمثل، بما أن $x \in B \cup C$، فإن $x \in B$. هذا يثبت أن $x \in A \cap B$ وبالتالي $x \in (A \cap B) \cup C$.

2) ليكن $x \in (A^c)^c$. ومنه $x \notin A^c$ ، وبالتالي $x \in A$. بالمقابل ، إذا كان $x \in A$ ، فإن $x \notin A^c$ وبالتالي $x \in (A^c)^c$.

3) ليكن $x \in (A \cap B)^c$. ثم $x \notin A \cap B$. إذن لدينا $x \notin A$ أو $x \notin B$ ، أي أن $x \in A^c$ أو $x \in B^c$.
نستنتج أن $x \in A^c \cup B^c$. بالمقابل ، ليكن $x \in A^c \cup B^c$. إذن $x \in A^c$ أو $x \in B^c$ ، أي أن ، $x \notin A$ أو $x \notin B$. على وجه الخصوص ، $x \notin A \cap B$ وبالتالي $x \in (A \cap B)^c$.

4) يمكننا أيضاًا تقديم المنطق السابق في نموذج التكافؤ

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff x \notin A \text{ و } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ و } x \in B^c \\ &\iff x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

لتكن E مجموعة، A ، B و C ثلاثة عناصر من $\mathscr{P}(E)$. أثبت أن:
Let E be a set, A , B and C three elements of $\mathscr{P}(E)$. Prove that:

1) إذا كان $A \cap B = A \cup B$ ، فإن $A = B$.
If $A \cap B = A \cup B$, then $A = B$.

2) إذا كان $A \cap B = A \cap C$ و $A \cup B = A \cup C$ ، فإن $B = C$. هل يكفي أحد الشرطين؟
If $A \cap B = A \cap C$ and $A \cup B = A \cup C$, then $B = C$. Is one of the two conditions sufficient?

Solution : الحـــل

1) من خلال تناظر القضية في A و B، يكفي إثبات أن $A \subset B$.
ليكن $x \in A$ ونفرض أن $x \notin B$. ومنه فإن $x \in A \cup B$ ولكن $x \notin A \cap B$ وبالتالي فإن المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$ مختلفتان ، وهذا تناقض. لذلك فإن $x \in B$.

2) من خلال تناظر القضية في B و C ، يكفي إثبات أن $B \subset C$.
ليكن $x \in B$. نميز هنا حالتين:

A) إما $x \in A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cap B = A \cap C$ ، وبالتالي $x \in C$.

B) أو $x \notin A$، في هذه الحالة ، $x \in A \cup B = A \cup C$ وبالتالي $x \in A$ أو $x \in C$. نظراً لأننا في الحالة $x \notin A$ ، فإننا نستنتج أن $x \in C$.

في جميع الحالات ، أثبتنا $x \in C$ ، وبالتالي $B \subset C$. شرط واحد غير كافي.

إذا افترضنا فقط أن $A \cup B \subset A \cup C$ ، علينا فقط أن نأخذ المثال التالي لكي نبرهن ضرورة الشرطين معا.

ليكن $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{1\}$ و $C = \{2\}$.

لدينا $A \cup B \subset A \cup C$ ، لكن ليس لدينا $B \subset C$.

إذا افترضنا فقط أن $A \cap B \subset A \cap C$ ، علينا أن نأخذ فقط كمثال $A = C = \{1\}$ و $B = \{1, 2\}$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

اوجد مجموعة أجزاء المجموعة

Find the set of parts of the set

$$E = \{a, b, c, d\}.$$

Solution : الحــل

المجموعة $P(E)$ لأجزاء مجموعة $E = a, b, c, d$ تحتوي على جميع المجوعات الجزئية الممكنة للمجموعة E، بما في ذلك المجموعة الخالية والمجموعة نفسها. إليك جميع المجموعات الجزئية:

The set $P(E)$ of parts of the set $E = \{a, b, c, d\}$ includes all possible subsets of E, including the empty set and the set itself. Here are all the subsets:

$$\begin{aligned} P(E) = \{ & \phi, \\ & \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ & \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ & \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \\ & E\} \end{aligned}$$

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن E و F مجموعتين و لتكن A و C مجموعتين جزئيتين من E و B ،D مجموعتين جزئيتين من F .

Let E and F be two sets, and let A and C be two subsets of E and B , D be two subsets of

F .

أثبت أن　*Prove that*

$$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D).$$

الحــل : Solution

سنبرهن الإحتواء المزدوج.

لتكن $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$. **ومنه** $(x,y)\in A\times B$ **وبالتالي** $x\in A$ ، $y\in B$.

لدينا أيضا $(x,y)\in(C\times D)$، **وبالتالي** $x\in C$ **و** $y\in D$. **لذا** ، $x\in A\cap C$ **و** $y\in B\cap D$.

هذا يثبت أن $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

بالمقابل ، لتكن $(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$ **يعني أن** $x\in A\cap C$ **وبالتالي** $x\in A$ **و** $x\in C$.

وبالمثل، $y\in B\cap D$ ، **لذا** $y\in B$ **و** $y\in D$. **إذن** ، $(x,y)\in A\times B$ **و** $(x,y)\in C\times D$.

نستنتج أن $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$.

تمرين رقم – 9 – Exercise N°

لتكن E مجموعة و A و B مجموعتين جزئيتين من E.

Let E be a set, and A and B be two subsets of E.

أثبت أن $A\Delta B=B$ (الفرق التناظري) إذا وفقط إذا كانت $A=\varnothing$.

Prove that $A\Delta B=B$ (symmetric difference) if and only if $A=\varnothing$.

الحــل : Solution

تذكر أولا أن الفرق التناظري يمكن كتابته ايضا على الشكل

$$\boxed{A\Delta B=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)}$$

حيث $\bar{A}$ **تمثل متمم المجموعة** A **في** E.

هناك إحتواء سهل:

إذا كان $A=\phi$ ، **فعند تعريف الفرق التناظري، لدينا** $A\cap B=B$ **و لأن** $A=\phi$ **و** $\bar{A}\cap B=B$.

بالمقابل ، إذا كان $A\cap B=B$ ، **يجب أن نثبت أن** $A=\phi$.

سنقسم الإثبات إلى قسمين:

أولا: نثبت أن $A\cap B=\phi$.

ليكن $x\in B$، **و على وجه الخصوص** $x\in A\cap B$ ، **و يعني حتما أن** $x\in A\cap\bar{B}$ **أو** $x\in\bar{A}\cap B$.

الاحتمال الأول مستحيل (لأن $x\in B$**) وبالتالي لدينا الإحتمال الثاني هو الصحيح** $x\in\bar{A}\cap B$.

وبالتالي ، فإن كل عنصر من عناصر من المجموعة B موجود أيضا في $\bar{A}$ ، وبالتالي $A \cap B = \phi$.

سنثبت أيضا أن $A \cap \bar{B} = \phi$.

في الواقع ، لنفرض أنه يمكننا إيجاد عنصر في $A \cap \bar{B}$. سيكون هذا العنصر أيضا في $A \cap B = B$ ، وهو أمر مستحيل لأنه سيكون في الوقت نفسه في B و $\bar{B}$.

في الأخير، المواجهة بين الخاصيتين السابقتين يعني أن $A = \phi$.

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

حدد ما إذا كانت العلاقات التالية انعكاسية ، تناظرية ، ضد تناظرية أو متعدية:

Determine whether the following relations are reflexive, symmetric, anti-symmetric, or transitive:

$$E = \mathbb{Z} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff x = -y \quad (1)$$

$$E = \mathbb{R} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \quad (2)$$

$$E = \mathbb{N} \text{ and } x\mathscr{R}y \iff \exists p, q \geq 1,\ y = px^q \quad (3)$$

where p and q are natural numbers. حيث p و q أعداد طبيعية.

Solution : الحـــل

(1) العلاقة ليست انعكاسية ، لأن 1 ليس لها علاقة بنفسها. في الواقع ، $-1 \neq 1$.

العلاقة تناظرية ، لأن $x = -y \iff y = -x$.

العلاقة ليست ضد تناظرية ، لأن $1\mathscr{R}(-1)$ و $(-1)\mathscr{R}1$ ، بينما $1 \neq -1$.

العلاقة ليست متعدية ، وإلا فإنها ستكون متناظرة

ومنه هذه العلاقة ليست علاقة تكافؤ ، ولا علاقة ترتيب.

Exercise N°– 11 – تمرين رقم

In $\mathbb{R}^2$ we define the relationship $\mathscr{R}$ as follows: نعرف في $\mathbb{R}^2$ العلاقة $\mathscr{R}$ كما يلي:

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x = x'.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافؤ. — *Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation.*

(2) أوجد صنف تكافؤ العنصر $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Find the equivalence class of the element $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Solution : الحــل

العلاقة $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ لأنها:

(1) **إنعكاسية لأن** $x = x$ **مهما يكن** x **ومنه** $(x,y)\mathscr{R}(x,y)$

(2) **تناظرية: إذا كان** $(x,y)R(x',y')$ **فإن** $x' = x$ **الذي يمكن كتابته أيضا** $x = x'$ **الذي يكافئ** $(x',y')\mathscr{R}(x,y)$.

(3) **متعدية: إذا كان** $(x,y)R(x',y')$ **و** $(x',y')R(x'',y'')$ **فإن** $x' = x$ **من جهة و** $x'' = x'$ **من جهة أخرى، يعني** $x = x''$ **الذي ينتج لنا** $(x,y)R(x'',y'')$.

نبحث الآن عن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) **أي تحديد الثنائيات** (x,y) **التي تحقق** $(x,y)\mathscr{R}(x_0,y_0)$. **لدينا**

$$(x,y)\mathscr{R}(x_0,y_0) \Longrightarrow x = x_0.$$

ونستطيع أن نقول أيضا أن x **يجب أن يساوي** x_0 **أما** y **يكون أي قيمة.**
نستنتج أن صنف تكافؤ العنصر (x_0, y_0) **هو المجموعة**

$$\{(x_0, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Exercise N°– 12 – تمرين رقم

نعرف على المجموعة $\mathbb{R}$ العلاقة التالية — *We define the following relation on the set $\mathbb{R}$*

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

(1) أثبت أن $\mathscr{R}$ علاقة تكافــؤ. — *Prove that $\mathscr{R}$ is an equivalence relation.*

(2) أوجد صنف تكافــؤ العنصر x من $\mathbb{R}$. — *Find the equivalence class of the element x of $\mathbb{R}$.*

(3) كم يوجد من عنصر في هذه الفئة؟ — *How many elements are there in this category?*

Solution : الحــل

(1) نلاحظ أن

$$x\mathscr{R}y \iff x^2 - x = y^2 - y \iff f(x) = f(y)$$

حيث $f : x \mapsto x^2 - x$ ، من السهل بعد ذلك التحقق من خلال هذا التطبيق أن $\mathscr{R}$ هي علاقة تكافؤ ، أي أنها انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

(2) ليكن $x \in \mathbb{R}$. نبحث عن العناصر y من $\mathbb{R}$ حيث $x\mathscr{R}y$.
لذلك يجب علينا حل المعادلة (في y)

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

باستعمال

$$(x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \iff (x-y)(x+y-1) = 0.$$

(3) حلول المعادلة هي $y = x$ و $y = 1 - x$. وبالتالي فإن صنف تكافؤ x هو المجموعة $\{x, 1-x\}$. وهي مكونة من عنصرين.
إذا كان $x = 1 - x \Longrightarrow x = 1/2$. في هذه الحالة ، صنف تكافؤ العنصر x هو المجموعة $\{1/2\}$.

Let's prove each of these properties:

(a) Reflexivity: For any $x \in \mathbb{R}$, we have:

$$x^2 - x = x - x \quad \text{(Subtracting } x \text{ from both sides)} \quad x^2 - x = 0.$$

This shows that $x\mathscr{R}x$ since $x^2 - x = 0$.

(b) Symmetry: Let $x, y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y.$$

We can rearrange this equation by adding y to both sides:

$$x^2 - y^2 + y = x - y + y$$
$$x^2 - y^2 + y = x.$$

Now, we have shown that $x\mathscr{R}y$ implies $x = x^2 - y^2 + y$. Similarly, if we start with $y\mathscr{R}x$, we will arrive at the same conclusion: $y = x^2 - y^2 + y$. Therefore, $\mathscr{R}$ is symmetric.

(c) Transitivity: Let $x, y, z \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$ and $y\mathscr{R}z$. This means:

$$x^2 - y^2 = x - y \quad \text{and} \quad y^2 - z^2 = y - z.$$

We can add these two equations together:

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (x - y) + (y - z).$$

Now, we can simplify each side of the equation:

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \; x^2 - z^2 \qquad = x - z.$$

This shows that $x\mathscr{R}z$, and therefore, $\mathscr{R}$ is transitive.

Since $\mathscr{R}$ satisfies all three properties (reflexivity, symmetry, and transitivity), it is indeed an equivalence relation.

(2) To find the equivalence class of the element $x \in \mathbb{R}$, we need to determine all elements $y \in \mathbb{R}$ such that $x\mathscr{R}y$.

From the definition of $\mathscr{R}$, we have:

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

Let's simplify this equation:

$$x^2 - y^2 = x - y \; (x - y)(x + y) \qquad = x - y.$$

Now, we have two cases:

Case 1: $x - y = 0$. This implies $x = y$.

Case 2: $x - y \neq 0$. In this case, we can divide both sides by $(x - y)$:

$$x + y = 1.$$

Now, we have two equations:

(i) $x = y$ from Case 1.

(ii) $x + y = 1$ from Case 2.

Therefore, the equivalence class of x consists of all real numbers y such that $y = x$ or $y + x = 1$.

(3) To determine how many elements are in this equivalence class, let's analyze the possibilities:

(a) If $y = x$, then there is only one element in the equivalence class, which is $x = 1/2$
(b) If $y \neq x$, then there is only two elements in the equivalence class, which is $\{x, 1 - x\}$

Exercise N°– 13 – تمرين رقم

1) لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $x \mapsto x^2$ و لتكن $A = [-1, 4]$. أوجد:

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ where $x \mapsto x^2$ and let $A = [-1, 4]$. Find:

A) الصورة المباشرة للمجموعة A بواسطة التطبيق f

The direct image of the set A by application f.

B) الصورة العكسية للمجموعة A بواسطة التطبيق f.

The inverse image of the set A by the application f.

2) لتكن الدالة $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Let the function be $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

A) ماهي الصورة المباشرة بواسطة $\sin$ للمجموعة $\mathbb{R}$؟ و $[0, 2\pi]$؟ و $[0, \pi/2]$؟

What is the direct image by $\sin$ *of the set* $\mathbb{R}$*? And* $[0, 2\pi]$*? And* $[0, \pi/2]$*?*

B) ماهي الصورة العكسية بواسطة $\sin$ للمجموعة $[0, 1]$؟ و $[3, 4]$؟ و $[1, 2]$؟

What is the inverse image by $\sin$ *of the set* $[0, 1]$*? And* $[3, 4]$*? And* $[1, 2]$*?*

Solution : الحـــل

1) A) **نبحث عن جميع القيم المأخوذة بواسطة x^2 عندما $x \in [-1, 4]$ فبين -1 و 0 ، يتم أخذ جميع القيم من 0 إلى 1 ، وبين 0 و 4 ، جميع القيم بين 0 و 16 لذلك ، $f(A) = [0, 16]$.**

We are looking for all the values taken by x^2 when x$\in [-1, 4]$. Between -1 and 0, all values are taken from 0 to -1, and between 0 and 4, all values are taken from 0 to 16. Therefore, $f(A) = [0, 16]$.

(B لدينا $x \in f^{-1}(A)$ إذا وفقط إذا كانت $x^2 \in [-1,4]$ بالطبع تم استبعاد القيم السالبة ، ولكي تكون x^2 في $[0,4]$ ، فمن الضروري والكافي أن $x \in [-2,2]$ إذن لدينا $f^{-1}(A) = [-2,2]$.

We have $x \in f-1(A)$ if and only if $x^2 \in [-1,4]$, of course, excluding negative values. To have x^2 in $[0,4]$, it is necessary and sufficient for x to be in $[-2,2]$. So, we have $f^{-1}(A) = [-2,2]$.

2) الصورة المباشرة لـ $\mathbb{R}$ اعتبارا من $[0,2\pi]$ هي$[-1,1]$.
الصورة المباشرة لـ $[0,\pi/2]$هي $[0,1]$.
لتحديد الصورة المقلوبة لـ $[0,1]$، نبحث عن الأعداد الحقيقية x مثل $\sin(x) \in [0,1]$ و منه، القيم الحقيقية التي يمكن كتابتها هي $u + k2\pi$ مع $u \in [0,\pi]$ و $k \in \mathbb{Z}$. بإمكاننا كتابة المجموعة

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi].$$

لا يوجد عدد حقيقي جبه في $[3,4]$ وبالتالي فإن الصورة العكسية لـ $[3,4]$ هي المجموعة الفارغة.
أخيرا، الصورة العكسية لـ $[1,2]$ مطابقة للصورة العكسية لـ $\{1\}$ ، وهي تساوي $\{\pi/2 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercise N°– 14 – تمرين رقم

لتكن f و g الدوال المعرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ المعرفة كما يلي $f(x) = 2x$ و

Let f and g be the functions defined from $\mathbb{N}$ towards $\mathbb{N}$ defined as follows $f(x) = 2x$ and

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \text{ an even number} \\ 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

Find $g \circ f$ and $f \circ g$. أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$.

هل الدوال f و g متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the functions f and g Injectionts? surjections? bijections?

Solution : الحـــل

1) لنجد أولاً التركيب $g \circ f$ و $f \circ g$:

Let's first find the compositions $g \circ f$ and $f \circ g$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = x.$$

من جهة أخرى:

On the other hand:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(x/2) = x & \text{if } x \text{ an even number} \\ f(0) = 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

بصفة خاصة، لدينا:

In particular, we have:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

لأن

because

$$f \circ g(1) = 0 \neq g \circ f(1) = 1.$$

2) الآن دعونا نحلل خصائص الدوال:

Now, let's analyze the properties of the functions:

من أجل الدالة:

For the function :

$$f(x) = 2x$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه من أجل كل عددين طبيعيين مخلفين x_1 وx_2، يكون $f(x_1) = 2x_1$ و$f(x_2) = 2x_2$ مختلفين.

Injection: Yes, it's injective because for any two different natural numbers x_1 and x_2, $f(x_1) = 2x_1$ and $f(x_2) = 2x_2$ are different.

الغمور: إنها ليست غامرة لأن الأعداد الفردية ليس لها صور.

Surjection: No, it's not surjective because the odd numbers don't have images.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not bijection because it's not surjective.

من أجل الدالة:

For the function :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{if } x \text{ an even number} \\ 0 & \text{if } x \text{ an odd number} \end{cases}$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأن $g(3) = g(7) = 0$

Injection: No, it's not injective because it maps different even numbers to the same value (e.g., $g(3) = g(7) = 1$).

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنه يوجد على الأقل عنصر $(y = 1)$ في المجموعة $\mathbb{N}$ ليس لها سابقة في المجموعة $\mathbb{N}$ وهذا ما يعني أن g ليس غامرا.

Surjection: No, it's not surjective because there exists at least one element $(y = 1)$ in the domain $\mathbb{N}$ which is not the image of an element in the domain $\mathbb{N}$ under g, which means that g is not surjective.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة و ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: No, it's not a bijection because it's neither injective nor surjective.

من خلال ما سبق كلا الدالتين f و g ليسا تقابل.

From the above, both functions f and g are not bijective.

Exercise N°– 15 – تمرين رقم

هل الدوال التالية متباينة؟ غامرة؟ تقابلية؟

Are the following functions Injectionts? surjections? bijections?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Solution : الحـــل

Let's analyze each of the functions: **لنحلل كل دالة على حدى:**

The function 1) **الدالة:**

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) إذا كان $2n = 2m$ فإن $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) if $2n = 2m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_1(n) = f_1(m) \Longrightarrow 2n = 2m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجال. على سبيل المثال، لا يوجد عدد صحيح n حيث $2n = 1$.

Surjection: This function is not surjective because it does not cover all integers in the domain. For example, there is no integer n such that $2n = 1$.

التقابل: نظرا لأنها ليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not surjective, it's not a bijection.

2) **الدالة:** The function

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n,$$

التباين: هذه الدالة متباينة لأنه لكل زوج من الأعداد الصحيحة (n, m) إذا كان $-n = -m$ فإن $n = m$

Injection: This function is injective because for every distinct pair of integers (n, m) , if $-n = -m$, then $n = m$.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : f_2(n) = f_2(m) \Longrightarrow -n = -m \Longrightarrow n = m$$

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي جميع الأعداد الصحيحة في المجموعة $\mathbb{Z}$. من أجل كل عدد صحيح m في $\mathbb{Z}$، يوجد عدد صحيح n حيث $-n = -m$.

Surjection : This function is surjective because it covers all integers in the domain $\mathbb{Z}$. For any integer m in $\mathbb{Z}$, there exists an integer n such that $-n = -m$.

التقابل: نظرا لأنها متباينة و غامرة فهي تقابل.

Bijection: Since it's both injective and surjective, it is a bijection.

The function　　3) الدالة:

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالة ليست متباينة لأنه و على سبيل المثال، $f_3(-2) = 4$ **و** $f_3(2) = 4$**، لذا فهي ليست متباينة.**

Injection : This function is not injective because for example, $f_3(-2) = 4$ and $f_3(2) = 4$, so it's not injective.

الغمور:هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$**. من أجل كل عدد حقيقي** y**، يوجد عدد حقيقي** x **حيث** $x^2 = y$.

Surjection : This function is surjective because it covers all real numbers in the domain $\mathbb{R}$. For any real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

The function　　4) الدالة:

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2,$$

التباين: هذه الدالةة ليست متباينة لنفس السبب مثل f_3**. ليكن** x_1 **و** x_2 **أعداد حقيقية حيث** $x_1 = -x_2$**. لهما نفس الصورة الموجبة لهذا هي ليست متباينة.**

Injection : This function is not injective for the same reason as f_3. It maps distinct real numbers x_1 and x_2 to the same positive value if $x_1 = -x_2$. So, it's not injective.

الغمور: هذه الدالة غامرة لأنها تغطي كافة الأعداد الحقيقية في المجموعة $\mathbb{R}$**. من أجل كل عدد حقيقي** y**، يوجد عدد حقيقي** x **حيث** $x^2 = y$.

Surjection: This function is surjective because it covers all positive real numbers in the domain $\mathbb{R}_+$. For any positive real number y, there exists a real number x such that $x^2 = y$.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's not injective, it's not a bijection.

5) الدالة: The function

$$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2,$$

Injection: This function is not injective because it maps distinct complex numbers z_1 and z_2 to the same value if $z_1 = z_2$. For example, $f_5(-2i) = -4$ and $f_5(2i) = -4$, so it's not injective.

الغمور: هذه الدالة ليست غامرة لأنها لا تغطي كافة الأعداد في المجموعة $\mathbb{C}$. على سبيل المثال، لا يمكن إيجاد سوابق للأعداد الحقيقية السالبة.

Surjection: This function is not surjective because it doesn't cover all complex numbers in the domain $\mathbb{C}$. For example, it cannot map to negative real numbers.

التقابل: نظرا لأنها ليست متباينة وليست غامرة فهي ليست تقابل.

Bijection: Since it's neither injective nor surjective, it's not a bijection.

Exercise N°– 16 – تمرين رقم

Show that 5 divides $n^5 - n$.

بين أن 5 يقسم $n^5 - n$.

Solution : الحـــل

لنثبت أن العدد 5 يقسم $n^5 - n$ من أجل كل الأعداد الطبيعية n باستخدام الإستدلال بالتراجع، سنتبع الخطوات التالية :

To prove that 5 divides $n^5 - n$ for all natural numbers n using mathematical induction, we will follow these steps:

الحالة الأساسية: أولاً، سنتحقق مما إذا كان البيان صحيحاً للحالة الأساسية، والتي عادة ما تكون $n = 1$. بالنسبة لـ $n = 1$، لدينا:

Base Case: First, we'll check if the statement holds for the base case, which is typically $n = 1$. For $n = 1$, we have:

$$1^5 - 1 = 0.$$

نظرا لأن الصفر قابل للقسمة على أي عدد صحيح، بما في ذلك 5، فإن الحالة الأساسية صحيحة.

Since 0 is divisible by any integer, including 5, the base case is true.

الفرضية الاستقرائية: نفترض أن الخاصية التراجعية صحيحة من أجل العدد الطبيعي k، أي نفترض أن 5 تقسم $k^5 - k$.

Inductive Hypothesis: We assume that the statement is true for some positive integer k, i.e., we assume that 5 divides $k^5 - k$.

الخطوة الاستقرائية: علينا أن نثبت أن الخاصية صحيحة لـ $k + 1$ استناداً إلى الافتراض الذي قمنا به في الفرضية الاستقرائية.

Inductive Step: We need to prove that the statement is true for $k+1$ based on the assumption made in the inductive hypothesis.

بدءا من الافتراض، لدينا $k^5 - k = 5m$ حيث m عدد صحيح.

Starting with the assumption, we have: $k^5 - k = 5m$, where m is an integer.

Now, we'll consider: **الآن، سننظر إلى :**

$$(k+1)^5 - (k+1) :$$

$$\begin{aligned}
(k+1)^5 - (k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - (k+1) \\
&= k^5 - k + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\
&= 5m + 5\left(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5 + \left(m + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k\right) \\
&= 5m', m' \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

إذاً، قد أثبتنا أن $(k+1)^5 - (k+1)$ قابل للقسمة على 5.

So, we've shown that $(k+1)^5 - (k+1)$ is divisible by 5.

بموجب مبدأ الاستدلال الرياضي، قد ثبتنا أنه بالنسبة لجميع الأعداد الطبيعية n، **٥ يقسم** $n^5 - n$.

By the principle of mathematical induction, we have established that for all natural numbers n, 5 divides $n^5 - n$.

الفصل الثاني

الدوال الحقيقية *Real functions*

فهرس الفصل

تربط الدالة الحقيقية للمتغير الحقيقي قيمة حقيقية بأي عدد من مجال تعريفها. هذا النوع من الدوال العددية يجعل من الممكن على وجه الخصوص صياغة علاقة بين كميتين فيزيائيتين. تمميزة بمنحناها التمثيلي في المستوى المزود بمعلم، ويمكن أيضا تحديد هذه الدالة من خلال صيغة معينة أو معادلة تفاضلية أو شكل تحليلي.

A real-valued function of a real variable relates a real value to any number within its domain. This type of numerical function makes it possible, in particular, to formulate a relationship between two physical quantities. It is characterized by its graphical representation in the coordinate plane, and can also be defined by a specific formula, differential equation, or analytical form.

1.2 الدالة العددية *Numerical function*

1.1.2 : Definition - تعريف

لتكن E و F مجموعتان و f علاقة من المجموعة E نحو المجموعة F . نقول عن f أنها دالة إذا أرفقت بكل عنصر من E عنصرا على الأكثر من F ونكتب:

Let E and F be two sets and f be a relation from the set E to the set F. We say that f is a function, if every element of E is associated with at most one element of F, and we write:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f: E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

is an application — تشكل تطبيق.

2.1.2 : Definition - تعريف

نقول أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان :

We say that f is a numerical function if and only if:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f: E\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & F\subset\mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=y \end{array}}$$

is an application — تشكل تطبيق.

بمعنى أن f دالة عددية إذا وفقط إذا كان لكل عنصر x من E صورة على الأكثر في $F \in \mathbb{R}$.

In other words, f is a numerical function if and only if for every element x in E, its image in F is at most one real number.

1.1.2 : Example - مثال

الدالة مقلوب x :

The function is the inverse of x:

$$\begin{aligned} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

1.1.2 Domain of definition مجموعة التعريف

تحديد مجموعة تعريف دالة عددية يعني إيجاد مجموعة الأعداد التي يمكن أن نجد صورها بهذه الدالة. ولهذا يمكن أن نعرفها كما يلي:

To determine the domain of a numerical function, we need to find the set of numbers for which the function is defined. So we can define the domain of a numerical function as follows:

3.1.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية. مجموعة تعريف f، التي نرمز لها بالرمز $\mathrm{Dom}(f)$، هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية x التي تجعل $f(x)$ عدداً حقيقياً محدداً. ونكتب

Let f be a numerical function. The domain of f, denoted by $\mathrm{Dom}(f)$, is the set of all real numbers x such that $f(x)$ is a well-defined real number and we write:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

بمعنى آخر، مجموعة تعريف الدالة العددية هي مجموعة جميع القيم التي تعطي نتيجة عددية حقيقية عند إدخالها إلى الدالة، والتي تجعل الدالة محددة.

In other words, the domain of a numerical function is the set of all values for which the function is defined and has a real number output.

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

نأخذ كمثال

2.1.2 : Example - مثال

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي

Let the function f be defined as follows

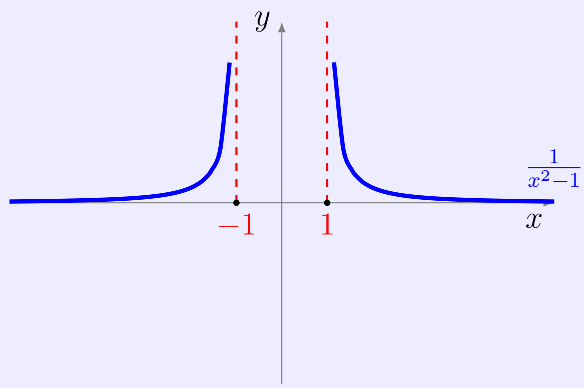
$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\frac{1}{(x^2-1)}. \end{aligned}$$

المتغير x يوجد بمقام الدالة . ونعلم أن مقام عدد حقيقي لا يمكن أن يساوي 0. إذن هنا لا يمكننا أن نحسب صورة العدد 1 و لا العدد -1 بالدالة f . بالتالي f معرفة على جميع الأعداد الحقيقية بإستثناء $-1, 1$ و نكتب :

The variable x is in the denominator of the function. We know that a real number cannot have a denominator equal to zero. Therefore, we cannot compute the image of the numbers 1 and -1 under the function f. Hence, f is defined for all real numbers except -1 and 1, and we write:

$$(f:\quad \textit{Defined} \quad \text{معرفة}\ ) \Longleftrightarrow x^2-1\neq 0$$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \\ &\Longleftrightarrow x=1 \wedge x=-1 \\ &\Longleftrightarrow D_f=\mathbb{R}_{-\{1,-1\}} \\ &\Longleftrightarrow D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$



2.1.2 Function curve منحنى الدالة

4.1.2 : Definition - تعريف

منحنى الدالة $f : U \to \mathbb{R}$ هو المجموعة الجزئية Γ_f من $\mathbb{R}^2$ المعرفة كما يلي

The graph of the function $f : U \to \mathbb{R}$ is the subset Γ_f of $\mathbb{R}^2$ defined as follows:

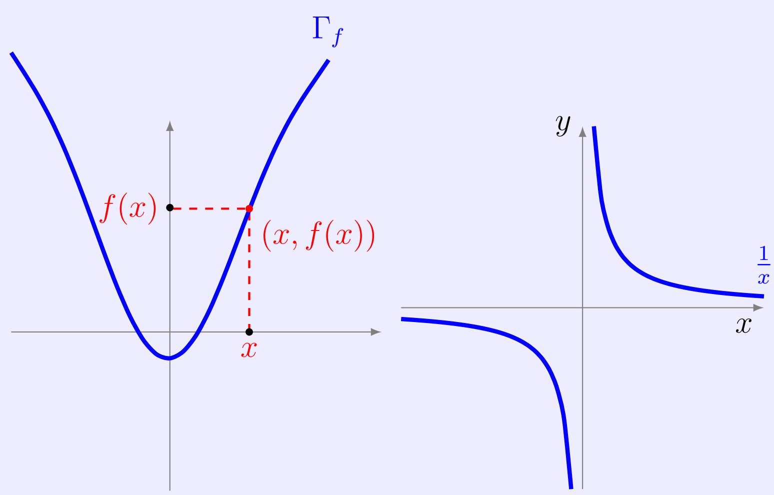
$$\boxed{\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.}$$

3.1.2 : Example - مثال

يمينا منحنى الدالة $1/x$ ويسارا منحنى الدالة

To the right the graph of the function $1/x$ and to the left of the graph of the function

$$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + \sin\left(\frac{3(x-1)}{2}\right).$$



2.2 *Parity and periodicity* التماثل والدورية

في هذا الجزء، سنتعلم كيفية تحديد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم لا، باستخدام الرسم البياني الخاص بها أو تعريفها. حيث يشير تناظر منحنى الدالة إلى ما إذا كانت فردية أم زوجية.

In this section, we will learn how to determine whether a function is even, odd, or neither, using its graph or its definition. The symmetry of the function's curve indicates whether it is odd or even.

1.2.2 الدالة الزوجية Even function

5.2.2 : Definition - تعريف

We say that f is an even function if:

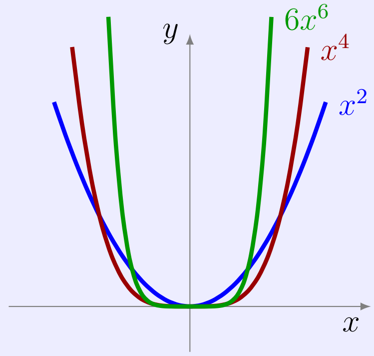
نقول أن f دالة زوجية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = f(-x).}$$

4.2.2 : Example - مثال

الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto ax^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ زوجي

Functions defined on the set $\mathbb{R}$ as $x \mapsto ax^n$ where n is even, are even functions.



إذا كانت الدالة f زوجية ، فهذا يعني أن $f(-x) = f(x)$ لجميع x في نطاق الدالة. وبالتالي ، إذا قمنا بتبديل x بـ $-x$ في نقطة $M(x_0, f(x_0))$ ، فستصبح النقطة $M(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, f(x_0))$.

If the function f is even, this means that $f(-x) = f(x)$ for all x in the domain of the function. Therefore, if we replace x with $-x$ in the point $M(x_0, f(x_0))$, the point $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, f(x_0))$ is obtained.

بالنسبة لمحور التراتيب، فإنه يمثل محور الـ x، لذلك يتم تبادل إحداثيات x فقط. وبالتالي ، يمكننا أن نرى أن نقطة $M(-x_0, f(x_0))$ هي المتناظرة لنقطة $M(x_0, f(x_0))$ بالنسبة لمحور التراتيب. وبالتالي ، فإن النقطتين M و M' هما متناظرتين بالنسبة لمحور التراتيب.

Regarding the axis of symmetry, it represents the x-axis, so only the x-coordinates are exchanged. Therefore, we can see that the point $M'(-x_0, f(x_0))$ is the reflection of the point $M(x_0, f(x_0))$ with respect to the axis of symmetry. Thus, the points M and M' are symmetric with respect to the axis of symmetry.

2.2.2 الدالة الفردية Odd function

6.2.2 : Definition - تعريف

We say that f is an odd function if:

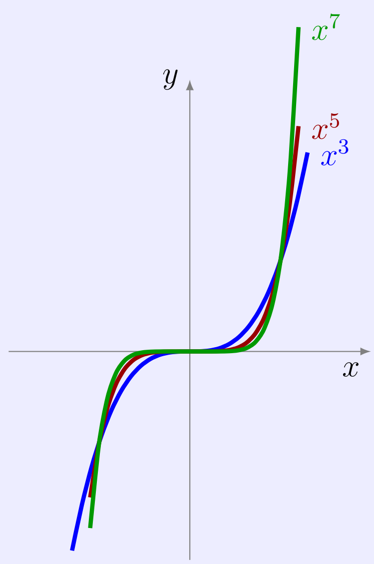
نقول أن f دالة فردية إذا كان :

$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x).}$$

5.2.2 : Example - مثال

الدوال المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي $x \mapsto x^n$ حيث $(n \in \mathbb{N})$ فردي

Functions defined on the set $\mathbb{R}$ as follows $x \mapsto x^n$ where $(n \in \mathbb{N})$ is an odd functions



إذا كانت الدالة f فردية، فذلك يعني أن $f(-x) = -f(x)$ لجميع x في مدى الدالة. وبالتالي، إذا قمنا بتبديل x بـ $-x$ في النقطة $M(x_0, f(x_0))$، فسيتم الحصول على النقطة $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, -f(x_0))$.

If the function f is odd, this means that $f(-x) = -f(x)$ for all x in the domain of the function. Therefore, if we replace x with $-x$ in the point $M(x_0, f(x_0))$, the point $M'(-x_0, f(-x_0)) = (-x_0, -f(x_0))$ is obtained.

وبالنسبة للمبدأ، فهو النقطة $(0,0)$ على مستوى الإحداثيات. وبالتالي، يمكننا أن نرى أن النقطة $M'(-x_0, f(-x_0))$ هي انعكاس النقطة $M(x_0, f(x_0))$ بالنسبة للمبدأ. وبالتالي، تكون النقطتين M و M' متماثلتين بالنسبة للمبدأ.

Regarding the origin, it is the point $(0,0)$ on the coordinate plane. Therefore, we can see that the point $M'(-x_0, f(-x_0))$ is the reflection of the point $M(x_0, f(x_0))$ with respect to the origin. Thus, the points M and M' are symmetric with respect to the origin.

3.2.2 الدالة الدورية Periodic function

بيانيا، تشير الدوال الدورية إلى نموذج يُعاد إنتاجه بشكل متكرر في المستوي الديكارتي. لفهم مفهوم الدورية تماما، من المهم إتقان مفاهيم الدورة والفترة.

Graphically, periodic functions refer to a pattern that is repeated regularly in the Cartesian plane. To fully understand the concept of periodicity, it is important to master the concepts of cycle and period.

تعريف - Definition : 7.2.2

يسمى جزء الرسم البياني الذي يتوافق مع أصغر جزء من نمط متكرر بدور الدالة. و نسمى الفجوة بين اثنين من النقاط الفاصلة الموجودة في نهايات نفس الدور باسم الفترة.

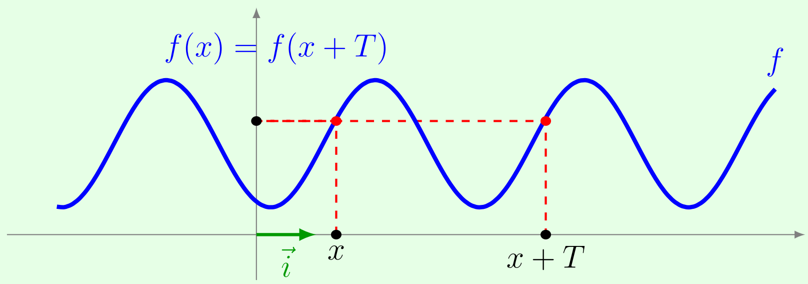
The part of the graph that corresponds to the smallest repeating pattern of a periodic function is called one cycle. The gap between two consecutive points that mark the end of the same cycle is called the period.

تعريف - Definition : 8.2.2

نقول أن f دالة دورية إذا وجد $k > 0$ حيث :

We say that f is a periodic function if there exists $k > 0$ where :

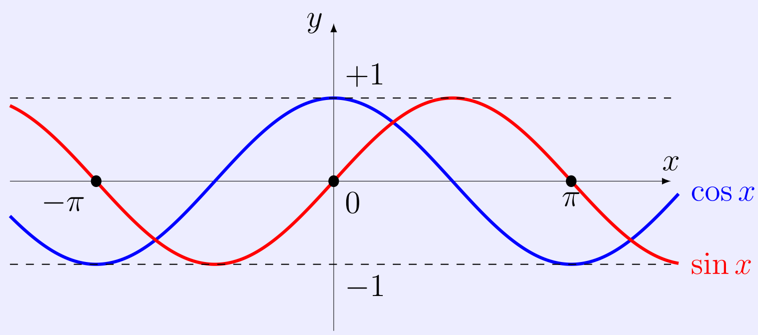
$$\boxed{\forall x \in D_f : f(x+k) = f(x).}$$



6.2.2 : Example - مثال

الدوال *sine* و *cosine* دوال دورية دورها 2π والدالة *tangent* دالة دورية دورها π.

The sine and cosine functions are periodic functions with a period of 2π, while the tangent function is a periodic function with a period of π.



4.2.2 الدوال الموجبة والسالبة Positive and negative functions

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة تعريفها D_f. وليكن Δ مجالا من D_f.

Let f be a numerical function defined on a set D_f, and let Δ be a subset of D_f.

9.2.2 : Definition - تعريف

تكون الدالة f موجبة (تماما) على Δ إذا كان

The function f is said to be positive (or strictly positive) on Δ if:

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \geq 0 \quad (f(x) > 0).}$$

و تكون الدالة f سالبة (تماما) على Δ إذا كان

The function f is said to be negative (or strictly negative) on Δ if:

$$\boxed{\forall x \in \Delta : f(x) \leq 0 \quad (f(x) < 0).}$$

1.2.2 : Remark - ملاحظة

- إذا كانت الدالة f موجبة فإن منحناها يكون فوق محور الفواصل والعكس بالنسبة لمنحنى الدالة السالبة.

If the function f is positive, its graph lies above the x-axis, and conversely, if the function f is negative, its graph lies below the x-axis.

- إذا كانت الدالة f موجبة تماما أو سالبة تماما فإن منحناها لا يتقاطع ابدا مع محور الفواصل.

If the function f is strictly positive or strictly negative, its graph never intersects the x-axis.

5.2.2 العمليات على الدوال Operations on functions

لتكن $f : U \to \mathbb{R}$ و $g : U \to \mathbb{R}$ دالتين معرفتين على نفس الجزء U من المجموعة $\mathbb{R}$. ومنه نستطيع تعريف الدوال التالية:

Let $f : U \to \mathbb{R}$ and $g : U \to \mathbb{R}$ be two defined functions on the same part U of the set $\mathbb{R}$. From this, we can define the following functions:

1) **مجموع الدالتين f و g هو الدالة $f + g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي**

The sum of the functions f and g is the function $f + g : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2) **جداء الدالتين f و g هو الدالة $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي**

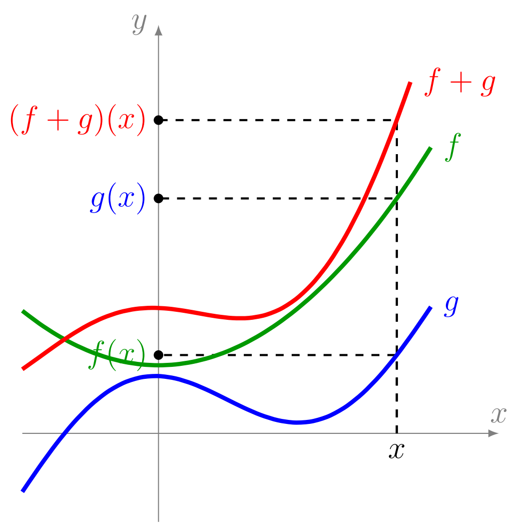
The product of the functions f and g is the function $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

3) الجداء بسلمي $\lambda \in \mathbb{R}$ والدالة f هو الدالة $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

The product by scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ and the function f is the function $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\forall x \in U, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$



6.2.2 مقارنة دالتين Comparison of two functions

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس الجزء $\Delta \subset D_f \cap D_g$. ومنه نقول أن f أصغر من أو يساوي g ونكتب

Let f and g be two defined functions on the same domain $\Delta \subset D_f \cap D_g$. We say that f is less than or equal to g, denoted as:

$$\boxed{f \leq g : \quad \text{if} \quad \text{إذا كان} \quad \forall x \in \Delta, f(x) \leq g(x).}$$

و نقول أن f أكبر من أو يساوي g ونكتب

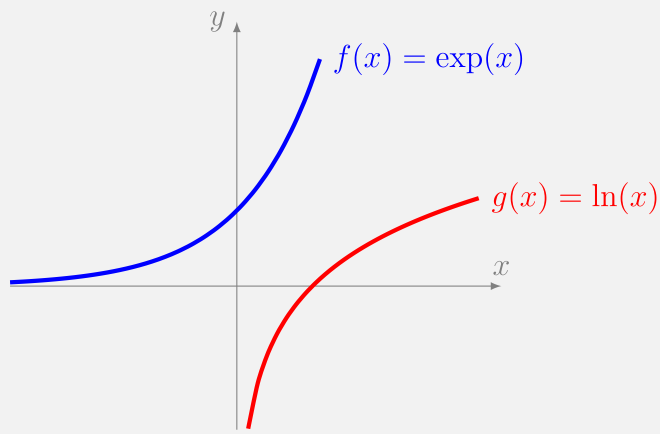
We say that f is greater than or equal to g, denoted as:

$$\boxed{f \geq g : \quad \text{if} \quad \text{إذا كان} \quad \forall x \in \Delta, f(x) \geq g(x).}$$

2.2.2 : Remark - ملاحظة

إذا كانت الدالة f أكبر من أو يساوي g فإن منحنى الدالة f يكون فوق منحنى الدالة g .

If the function f is greater than or equal to g, then the graph of the function f lies above the graph of the function g.



7.2.2 رتابة دالــة Function monotony

لتكن f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f. و ليكن I مجالا من D_f.

Let f be a function defined on its domain D_f, and let I be a subset of D_f.

10.2.2 : Definition - تعريف

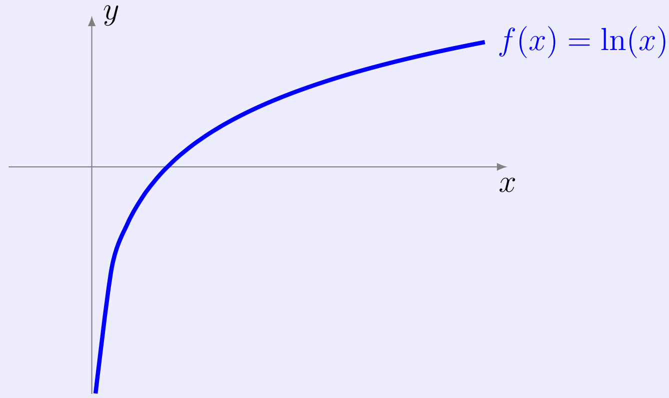
We say that f is increasing on I if and only if: نقول أن f متزايدة على I إذا وفقط إذا كان :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \geq f(y).}$$

7.2.2 : Example - مثال

الدالة لوغاريتم $x \mapsto \ln(x)$ دالة متزايدة على المجال $]0, +\infty[$.

The function logarithm $x \mapsto \ln(x)$ is an increasing function on the domain $]0, +\infty[$.



11.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متزايدة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

We say that f is strictly increasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) > f(y).}$$

12.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متناقصة على I إذا وفقط إذا كان :

We say that f is strictly decreasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) \leq f(y).}$$

13.2.2 : Definition - تعريف

نقول أن f متناقصة تماما على I إذا وفقط إذا كان :

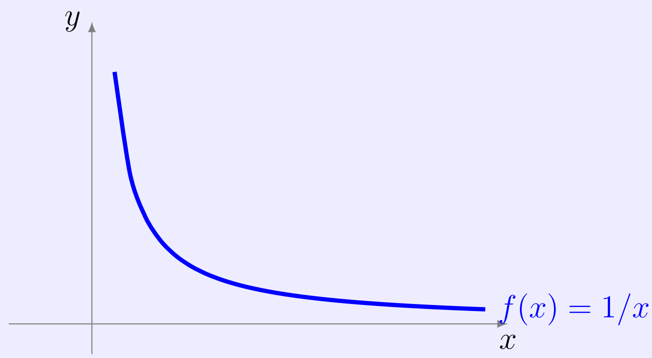
We say that f is strictly decreasing on I if and only if:

$$\boxed{\forall (x,y) \in I^2 : x > y \implies f(x) < f(y).}$$

8.2.2 : Example - مثال

الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ دالة متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$.

The inverse function $x \mapsto \frac{1}{x}$ is a strictly decreasing function on the domain $]0, +\infty[$.



8.2.2 Finite function الدالة المحدودة

قبل البدء في البحث ما إذا كانت الدالة محدودة أو لا لابد ان تكون الدالة معرفة على مجموعة غير خالية ثم نبدأ في البحث عن حدود الدالة.

Before investigating whether a function is bounded or not, it must be defined on a non-empty set, and then we can start searching for the bounds of the function.

14.2.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f.

Let f be a numerical function defined on the set D_f

1) نقول أن f محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث :

We say that f is bounded above if and only if there exists a real number M such that:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq M.}$$

2) نقول أن f محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث :

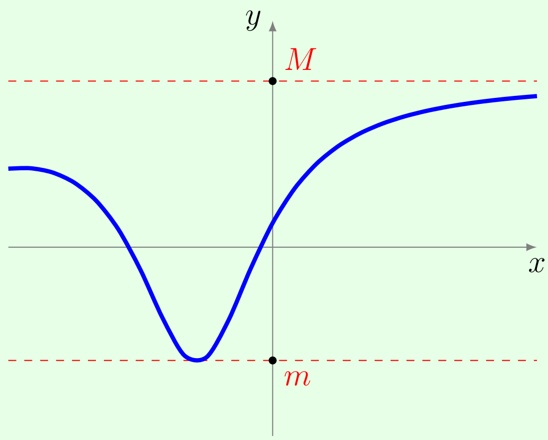
We say that f is bounded below if and only if there exists a real number m such that:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad m \leq f(x).}$$

3) نقول أن f محدودة إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث :

We say that f is bounded if and only if there exist two real numbers m and M such that:

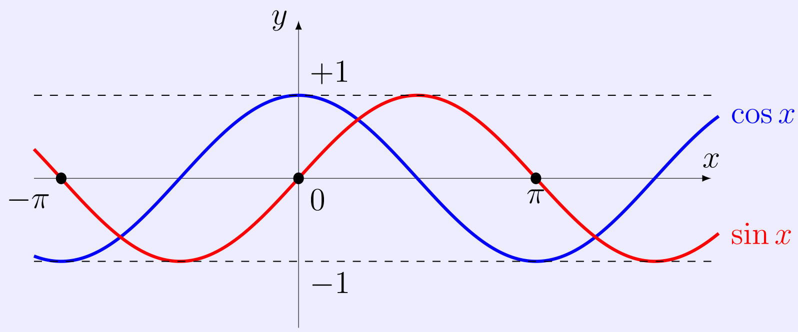
$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad m \leq f(x) \leq M.}$$



9.2.2 : Example - مثال

الدوال *sine* و *cosine* دوال محدودة.

The sine and cosine functions are bounded functions.



9.2.2 القيم القصوى والدنيا لدالة Max and min values of a function

15.2.2 : Definition - تعريف

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و ليكن $x_0 \in D_f$ و I مجال من D_f.

Let f be a numerical function defined on the set D_f, and let $x_0 \in D_f$ and I be a subset of D_f.

1) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة القصوى المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the number $f(x_0)$ is the absolute maximum value of the function f at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall x \in D_f : \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

2) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة قصوى نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

We say that the number $f(x_0)$ is a relative maximum value of the function f at the point x_0 in the domain I if $x_0 \in I$ and:

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \leq f(x_0).}$$

3) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه القيمة الدنيا المطلقة للدالة f عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the number $f(x_0)$ is the absolute minimum value of the function f at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

4) نقول أن العدد $f(x_0)$ أنه قيمة دنيا نسبية للدالة f عند النقطة x_0 في المجال I إذا كان $x_0 \in I$ و

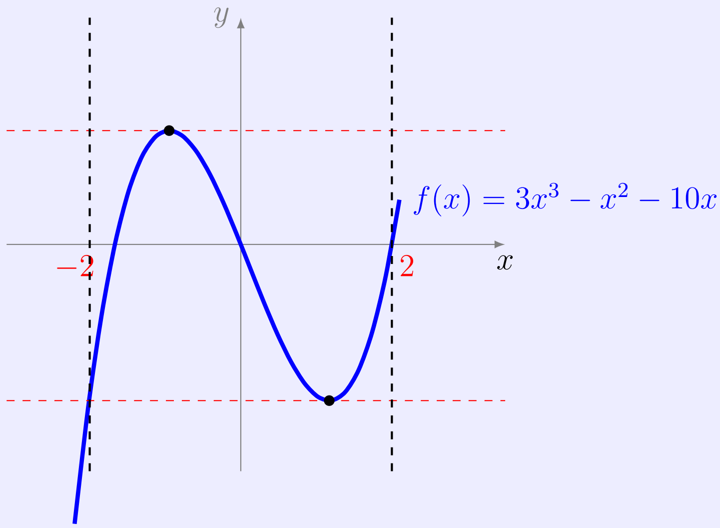
We say that the number $f(x_0)$ is a relative minimum value of the function f at the point x_0 in the domain I if $x_0 \in I$ and:

$$\boxed{\forall x \in I \quad f(x) \geq f(x_0).}$$

10.2.2 : Example - مثال

الدالة f تقبل حد علوي وآخر سفلي في النقطتين المحددتين في الرسم على المجال $[2, 2]$.

The function f has an upper limit and a lower limit at the two specified points in the graph on the domain $[2, 2]$.



3.2 النهايـــات Limits

تعتبر النهايات من أحد المفاهيم الأساسية في الرياضيات ومن المفاهيم المهمة في التحليل حيث يعتمد عليها مفهوم الاستمرار والاشتقاق والتكامل. ولا شك في أن القارئ قد سبق له دراسة موضوع النهايات، لكن في هذا الفصل ندرس النهايات بشكل أكثر دقة.

Limits are one of the fundamental concepts in mathematics and an important concept in analysis, upon which the concepts of continuity, differentiation, and integration rely. Undoubtedly, the reader has already studied the topic of limits, but in this chapter, we study limits in more detail.

1.3.2 تعاريـــف Definitions

النهاية عند نقطة End at point

16.3.2 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة الجزئية V من $\mathbb{R}$ أنه جوار النقطة x_0 إذا كانت تحتوي على مجال مفتوح يحوي النقطة x_0.

We say that a subset V of $\mathbb{R}$ is a neighborhood of the point x_0 if it contains an open set that includes the point x_0.

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function defined on the domain I of $\mathbb{R}$. Let $x_0 \in \mathbb{R}$ be a point in the domain I.

17.3.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f المعرفة في جوار النقطة x_0 (ربما تكون غير معرفة عند النقطة x_0) أنها تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عند النقطة x_0 اذا كان:

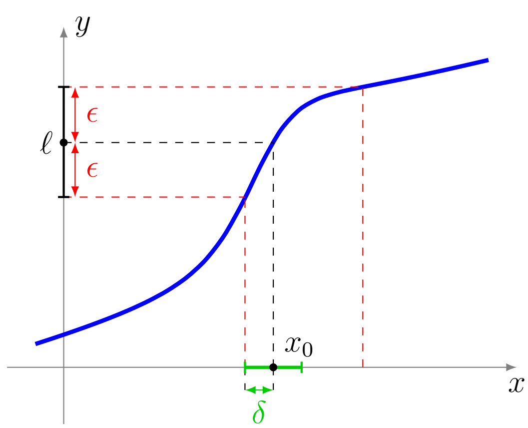
We say that the function f, defined in a neighborhood of the point x_0 (possibly undefined at the point x_0), has a limit $\ell \in \mathbb{R}$ at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

ونقول أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ℓ لما x يؤول الى x_0 و نكتب :

and we say that the function $f(x)$ approaches ℓ as x approaches x_0, and we write:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ \textit{or} \quad \text{أو} \quad \lim_{x_0} f = \ell.}$$



11.3.2 : Example - مثال

لتكن $f(x) = 3x - 2$ المطلوب إيجاد النهاية عند النقطة $x_0 = 1$. لدينا:

Let $f(x) = 3x - 2$, the task is to find the limit at the point $x_0 = 1$. We have:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(3x - 2) = 1$$

وباستعمال التعريف نجد

Using the definition, we find

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta \quad &\implies \quad |3x - 2 - 1| < \epsilon \\ &\implies \quad |3x - 3| < \epsilon \\ &\implies \quad |3(x - 1)| < \epsilon \\ &\implies \quad 3|(x - 1)| < \epsilon \\ &\implies \quad |(x - 1)| < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

يعني يكفي أن نأخذ القيمة $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ لكي نجد أن

It means that taking the value $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ is sufficient to show that for any x satisfying $|x - 1| < \delta$, we have $|f(x) - 1| < \epsilon$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

لتكن f دالة معرفة على المجموعة من الشكل $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Let f be a function defined on the set of points of the form $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

18.3.2 : Definition - تعريف

1) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $+\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the function f tends to $+\infty$ at the point x_0 if

$$\boxed{\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.}$$

ونكتب:

we write:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.}$$

2) نقول أن الدالة f تقبل نهاية $-\infty$ عند النقطة x_0 إذا كان

We say that the function f has a limit of $-\infty$ at the point x_0 if:

$$\boxed{\forall A > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.}$$

لتكن الدالة $f : I \to \mathbb{R}$ المعرفة على مجموعة من الشكل $I =]a, +\infty[$.

Let the function $f : I \to \mathbb{R}$ be defined on a set of the form $I =]a, +\infty[$.

19.3.2 : Definition - تعريف

1) ليكن $\ell \in \mathbb{R}$ نقول أن الدالة f تقبل النهاية ℓ عند $+\infty$ إذا كان

We say that the function f converges to the limit $\ell \in \mathbb{R}$ as x approaches infinity, denoted by $+\infty$, if:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I : \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{Or} \quad \text{أو} \quad \lim_{+\infty} f = \ell.}$$

2) ونقول أن الدالة f تقبل النهاية $+\infty$ عند $+\infty$ إذا كان

We say that the function f converges to infinity, denoted by $+\infty$, as x approaches to $+\infty$, if:

$$\boxed{\forall A > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I : \quad x > B \implies f(x) > A.}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

بنفس الطريقة، نعرف الحدّ عند اللانهاية السالبة لدالة f المعرّفة على مجموعة من الشكل $]-\infty, a[$.
نقول إن الدالة f تقبل نهاية $\ell \in \mathbb{R}$ عندما يؤول x إلى اللانهاية السالبة، التي نرمز لها بالرمز $-\infty$، إذا كان:

Similarly, we define the limit at negative infinity for a function f defined on a set of the form $]-\infty, a[$. We say that the function f converges to the limit $\ell \in \mathbb{R}$ as x approaches negative infinity, denoted by $-\infty$, if:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I: \quad x < B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

we write: ونكتب

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \quad Or \quad \text{أو} \quad \lim_{-\infty} f = \ell.}$$

2.3.2 العمليات على النهايات Operations on limits

لتكن الدالتين f و g. لتكن النقطة x_0 حيث $x_0 = \pm\infty$.

Let f and g be two functions. Let x_0 be a point where $x_0 = \pm\infty$.

1.3.2 : Proposition - قضيـــة

If we have إذا كان

$$\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R} \text{ و } \lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$$

then: فإن :

- من أجل كل $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$

For every $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$.

- $\lim_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0}(f \cdot g) = \ell \cdot \ell'$
- إذا كان $\ell \neq 0$، ومنه $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

If $\ell \neq is0$, then $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

إذا كان أيضا $\lim_{x_0} f = +\infty$ (أو $-\infty$) فإن $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

If also $\lim_{x_0} f = +\infty$ *(or* $-\infty$*), then* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

4.2 الإستمرار Continuity

1.4.2 الإستمرار عند نقطة Continuity at a point

20.4.2 : Definition - تعريف

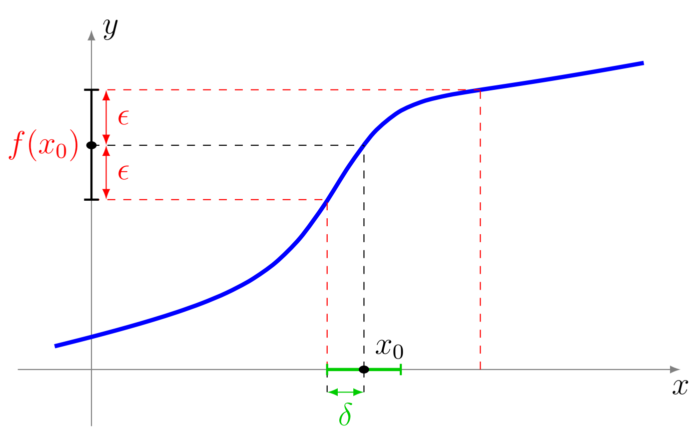
لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. ولتكن $x_0 \in \mathbb{R}$ نقطة من المجال I. نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا تحقق مايلي :

Let $f : I \to \mathbb{R}$ *be a function defined on the domain* I *of the real numbers. Let* $x_0 \in \mathbb{R}$ *be a point in the domain* I*. We say that the function* f *is continuous at the point* x_0 *if the following holds:*

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,}$$

we write: ونكتب:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .}$$



12.4.2 : Example - مثال

الدالة $f(x)=e^x$ مستمرة عند النقطة $x_0=0$ لأن

The function $f(x)=e^x$ is continuous at the point $x_0=0$ because

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^x=e^0=1=f(x_0).$$

2.4.2 الإستمرار على مجال Continuity on domain

21.4.2 : Definition - تعريف

لتكن $f:I\to\mathbb{R}$ دالة معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$.

Let $f:I\to\mathbb{R}$ be a function defined on the domain I of $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f مستمرة على المجال I إذاكانت مستمرة على جميع نقاط المجال I. نرمز لمجموعة الدوال المستمرة على مجال I بالرمز $\mathscr{C}(I)$.

We say that the function f is continuous on the domain I if it is continuous on all points of the domain I. We denote the set of continuous functions on the domain of I as $\mathscr{C}(I)$.

نظرية القيم المتوسطة Mean Value Theorem

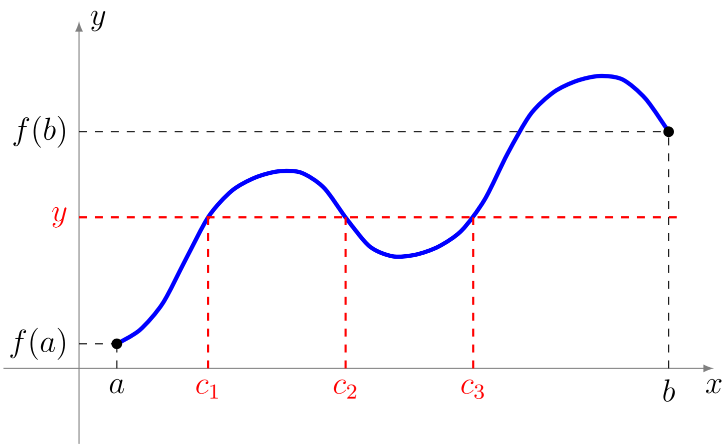
1.4.2 : Theorem - نظرية

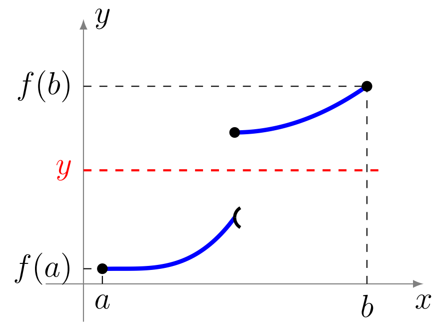
لتكن الدالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ المستمرة على القطعة المستقيمة $[a,b]$. ومنه من أجل كل عدد حقيقي y محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي $c\in[a,b]$ حيث $f(c)=y$.

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a function that is continuous on the closed interval $[a,b]$. For any real number y that lies between $f(a)$ and $f(b)$, there exists a real number $c\in[a,b]$ such that $f(c)=y$.

(في الشكل الأيسر) ، فإن العدد الحقيقي c ليس بالضرورة فريدا. من ناحية أخرى، إذا لم تكن الدالة مستمرة، فلن تعد النظرية صحيحة (الشكل على اليمين).

(In the left figure), the real number c is not necessarily unique. On the other hand, if the function is not continuous, then the theorem does not hold (as shown in the figure on the right).





3.4.2 الإمتداد بالإستمرار Continuous extension

الامتداد بالإستمرار لدالة يسمح لنا بتمديد نطاقها أو مجالها بسلاسة مع الحفاظ على استمراريتها، مما يمكننا من تحليل سلوكها في سياق أوسع والتغلب على القيود التي فرضتها مجموعة تعريفها الأصلية.

A continuous extension of a function allows us to extend its domain or range smoothly while preserving its continuity, enabling us to analyze its behavior in a broader context and overcome limitations imposed by its original definition.

22.4.2 : Definition - تعريف

ليكن المجال I و لتكن x_0 النقطة من I و $f : I_{\{x_0\}} \to \mathbb{R}$ دالة.

Let the domain I, x_0 be the point from I and $f : I_{\{x_0\}} \to \mathbb{R}$ be a function.

1) نقول أن الدالة f قابلة للتمديد بالإستمرار عند النقطة x_0 إذا كانت f تقبل نهاية منتهية عند x_0. ونكتب:

We say that the function f is continually extendable at the point x_0 if f accepts a finite limit at x_0, and we write:

$$\ell = \lim_{x_0} f.$$

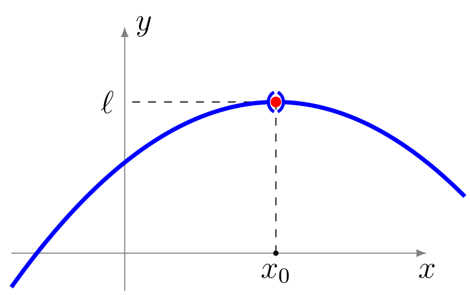
2) نعرف حينها الدالة التي نرمز لها بالرمز $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ من أجل كل $x \in I$

We then define the function that we denote $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ for each $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \neq x_0 \\ \ell & \text{if } x = x_0. \end{cases}$$

ومنه الدالة $\tilde{f}$ مستمرة عند النقطة x_0 وتسمى تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة x_0.

Then the function $\tilde{f}$ is continuous at point x_0, and the extension of the function f is called continuing at point x_0.



13.4.2 : Example - مثال

لتكن الدالة المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي

Let the function defined on the set $\mathbb{R}^*$ be as follows

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

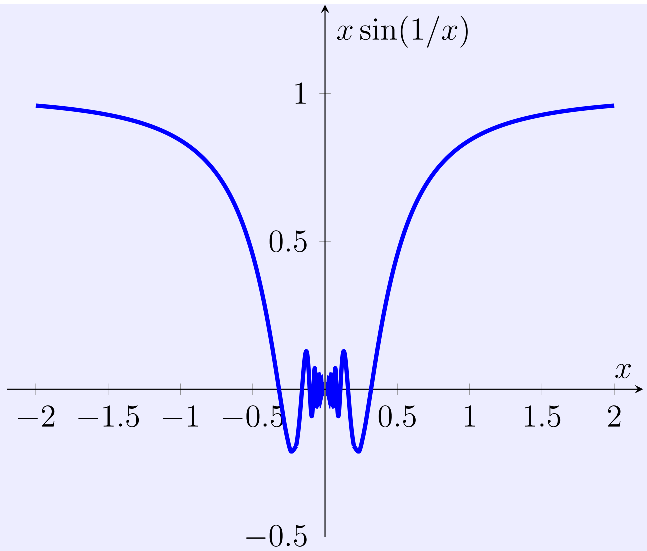
هل f تقبل التمديد بالإستمرار عند 0 ؟

Does f accept extension by continuing at 0?

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $|f(x)| \leq |x|$، نستنتج أن f تؤول لـ 0 عند 0. أي أنها قابلة للتمديد بالإستمرار عند 0 وتمديدها هو الدالة $\tilde{f}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

We have for each $x \in \mathbb{R}^*$ that $|f(x)| \leq |x|$, we get that f goes to 0 at 0. That is, it is extendable continuously at 0 and its extension is the function $\tilde{f}$ defined on $\mathbb{R}$ as follows:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$



4.4.2 العمليات على الدوال المستمرة Operations on continuous functions

العمليات الأولية على الاستمرارية هي نتائج فورية للقضايا المماثلة على النهايات.

The primary operations on continuity are immediate consequences of analogous issues at the endpoints.

2.4.2 : Proposition - قضيـة

لتكن الدالتين $f, g : I \to \mathbb{R}$ لتكن النقطة $x_0 \in I$. ومنه:

Let the two functions $f, g : I \to \mathbb{R}$ be given. Let $x_0 \in I$ be a point, hence:

- $\lambda \cdot f$ مستمرة عند x_0 $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$.

$\lambda \cdot f$ is continuous at x_0 $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$.

- $f + g$ مستمرة عند x_0.

$f + g$ is continuous at x_0.

- $f \cdot g$ مستمرة عند x_0.

$f \cdot g$ is continuous at x_0.

- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، ومنه $\frac{1}{f}$ مستمرة عند x_0.

If $f(x_0) \neq 0$, then $\frac{1}{f}$ is continuous at x_0.

3.4.2 : Proposition - قضيــة

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ و $g : J \to \mathbb{R}$ دالتين حيث $f(I) \subset J$. إذا كانت f مستمرة عند النقطة $x_0 \in I$ و إذا كانت g مستمرة عند النقطة $f(x_0)$ فإن الدالة تركيب $g \circ f$ مستمرة عند النقطة x_0.

Let $f : I \to \mathbb{R}$ and $g : J \to \mathbb{R}$ be two functions, where $f(I) \subset J$. If f is continuous at the point $x_0 \in I$ and g is continuous at the point $f(x_0)$, then the composite function $g \circ f$ is continuous at the point x_0.

5.2 المشتق و قوانين الإشتقاق Derivative and derivation laws

المشتق وقوانين الاشتقاق هي مفاهيم أساسية في الحساب التفاضلي في الرياضيات. يتعلق المشتق بمعدل التغير الفوري لدالة معينة، بينما تشكل قوانين الاشتقاق مجموعة من القواعد والقوانين التي تُسهِّل علينا حساب المشتقات بطرق محددة وتقدم لنا معلومات حول خواص الدوال المشتقة.

Differentiation and the rules of differentiation are fundamental concepts in calculus in mathematics. Differentiation is concerned with the instantaneous rate of change of a given function, while the rules of differentiation form a set of rules and principles that facilitate the calculation of derivatives in specific ways and provide us with information about the properties of derivative functions.

1.5.2 المشتق في نقطة Derivative at a point

ليكن I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $f : I \to \mathbb{R}$ دالة. ولتكن $x_0 \in I$.

Let I be an open interval in $\mathbb{R}$ and $f : I \to \mathbb{R}$ be a function. Let $x_0 \in I$.

23.5.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت نسبة التزايد

We say that the function f is differentiable at the point x_0 if the rate of increase

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

تقبل نهاية ثابتة لما x يؤول للقيمة x_0. نسمى هذه النهاية العدد المشتق أو قيمة المشتق للدالة f عند القيمة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$. ونكتب

accepts a fixed limit as x approaches the value x_0. This fixed limit is called the derivative or the derivative value of the function f at the value x_0, denoted by $f'(x_0)$. We can write it as:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

24.5.2 : Definition - تعريف

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للإشتقاق على كل نقطة $x_0 \in I$. الدالة $x \mapsto f'(x)$ نسمى دالة المشتق نرمز لها بالرمز f' أو $\frac{df}{dx}$.

We say that the function f is differentiable on the interval I if it is differentiable at every point $x_0 \in I$. The function $x \mapsto f'(x)$ is called the derivative function, denoted by f' or $\frac{df}{dx}$.

14.5.2 : Example - مثال

الدالة المعرفة $f(x) = x^2$ قابلة للإشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$. ولدينا:

The function defined by $f(x) = x^2$ is differentiable at every point $x_0 \in \mathbb{R}$. We have:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

حتى أنه أثبتنا أن العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $2x_0$، أو أيضا يمكننا كتابة : $f'(x) = 2x$.

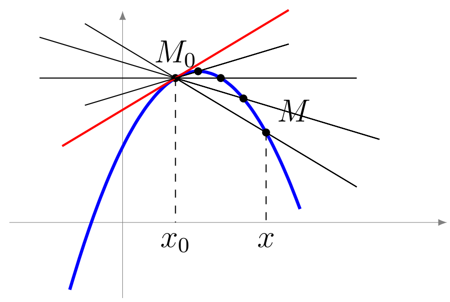
Indeed, we have shown that the derivative of the function f at x_0 is $2x_0$. Alternatively, we can express it as: $f'(x) = 2x$.

2.5.2 Geometric interpretation of the derivative التفسير الهندسي للمشتق

الخط المستقيم الذي يمر عبر نقاط مميزة $(x_0, f(x_0))$ و $(x, f(x))$ له معامل توجيه القيمة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. في النهاية نجد أن معامل توجيه الظل هو القيمة $f'(x_0)$. و معادلة المماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي :

The straight line passing through the distinct points $(x_0, f(x_0))$ and $(x, f(x))$ has a direction coefficient of $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ultimately, we find that the directional derivative coefficient is the value $f'(x_0)$. The equation of the tangent at the point $(x_0, f(x_0))$ is:

$$\boxed{y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0).}$$



4.5.2 : Proposition - قضيــة

لتكن f دالة فإن:

Let f be a function. Then,

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كانت النهاية

f is differentiable at x_0 if and only if the limit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

موجودة ومنتهية.

exists and finite.

- f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا وجد $\ell \in \mathbb{R}$ (الذي يساوي $f'(x_0)$) و دالة $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ حيث $0 \xrightarrow[x\to x_0]{} \epsilon(x)$ مع

f is differentiable at x_0 if and only if there exists $\ell \in \mathbb{R}$ (equal to $f'(x_0)$) and a function $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ such that $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ with the property that:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x).$$

5.5.2 : Proposition - قضيــة

ليكن المجال I المفتوح و $x_0 \in I$ ولتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة.

Let I be an open interval and $x_0 \in I$. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فإن f مستمرة عند x_0.

If f is differentiable at x_0, then f is continuous at x_0.

- إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن f مستمرة على I.

If f is differentiable on I, then f is continuous on I.

15.5.2 : Example - مثال

ليكن c عددحقيقي ثابت. ولتكن الدالة الثابتة f التي تأخذ القيمة c. نحسب مشتق الدالة الثابتة:

Let c be a fixed real number. Consider the constant function f that takes the value c. We calculate the derivative of the constant function.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0,$$

then: ومنه:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

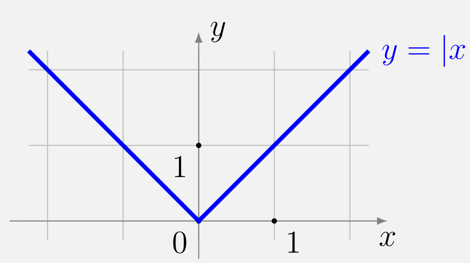
وبالتالي فإن مشتق الدالة الثابتة معدوم.

Therefore, the derivative of the constant function is zero.

3.5.2 : Remark - ملاحظة

العكس خاطئ: على سبيل المثال ، دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ مستمر في 0 ولكنه غير قابلة الإشتقاق عند 0.

The converse is incorrect: for example, the absolute value function $f(x) = |x|$ is continuous at 0 but not differentiable at 0.



وبالفعل، فإن معدل الزيادة عند $x_0 = 0$ يحقق :

Indeed, the rate of increase at $x_0 = 0$ achieves:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

3.5.2 حساب المشتق Derivative calculation

6.5.2 : Proposition - قضية

لتكن $f, g : I \to \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للإشتقاق على المجال I. ومنه من أجل كل $x \in I$ لدينا:

Let $f, g : I \to \mathbb{R}$ be two differentiable functions on the interval I. Hence, for every $x \in I$, we have:

- $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
- $$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

where λ is a constant real number. حيث λ عدد حقيقي ثابت

- $$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

(if $f(x) \neq 0$) (إذا كان $f(x) \neq 0$)

- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

(if $g(x) \neq 0$) (إذا كان $g(x) \neq 0$)

4.5.2 : Remark - ملاحظة

It is easier to remember the following equation: من الأسهل حفظ المساواة التالية:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \cdot g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

7.5.2 : Proposition - قضيـة

إذا كانت f دالة قابلة للإشتقاق عند x و g دالة قابلة للإشتقاق عند $f(x)$ فإن التركيب $g \circ f$ دالة قابلة للإشتقاق عند x ومشتقها من الشكل:

If f is a function that is differentiable at x and g is a function that is differentiable at $f(x)$, then the composition $g \circ f$ is a function that is differentiable at x, and its derivative is given by:

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x).}$$

16.5.2 : Example - مثال

Let's calculate the derivative of the function لنحسب مشتق الدالة

$$\ln(1 + x^2).$$

لدينا $g(x) = \ln(x)$ مع $g'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(x) = 1 + x^2$ مع $f'(x) = 2x$.

We have $g(x) = \ln(x)$ with $g'(x) = \frac{1}{x}$ and $f(x) = 1 + x^2$ with $f'(x) = 2x$.

Then, the derivative of the composition و منه مشتق التركيب

$$\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$$

is هو

$$\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Differentiation of some common functions مشتق بعض الدوال المألوفة

- الدالة الثابتة: إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عبارة عن ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

Constant function: If $f(x) = c$, where c is a constant, then $f'(x) = 0$.

- **الدالة القوة:**

إذا كانت $f(x) = x^n$، **حيث** n **عبارة عن ثابت، فإن** $f'(x) = nx^{n-1}$.

Power function: If $f(x) = x^n$, where n is a constant, then $f'(x) = nx^{n-1}$.

- **الدالة الأسية:**

إذا كانت $f(x) = e^x$، **فإن** $f'(x) = e^x$.

Exponential function: If $f(x) = e^x$, then $f'(x) = e^x$.

- **الدالة اللوغارتمية:**

إذا كانت $f(x) = \log_b(x)$، **حيث** b **هو أساس اللوغارتم، فإن** $f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$.

Logarithmic function: If $f(x) = \log_b(x)$, where b is the base of the logarithm, then $f'(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$.

- **الدوال المثلثية:**

Trigonometric functions:

دالة الجيب: إذا كانت $f(x) = \sin(x)$، **فإن** $f'(x) = \cos(x)$.

Sine function: If $f(x) = \sin(x)$, then $f'(x) = \cos(x)$.

دالة الجيب التمامية: إذا كانت $f(x) = \cos(x)$، **فإن** $f'(x) = -\sin(x)$.

Cosine function: If $f(x) = \cos(x)$, then $f'(x) = -\sin(x)$.

دالة الظل: إذا كانت $f(x) = \tan(x)$، **فإن** $f'(x) = \sec^2(x)$.

Tangent function: If $f(x) = \tan(x)$, then $f'(x) = \sec^2(x)$.

حيث:

where:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

- **الدوال الزائدية:**

Hyperbolic functions:

دالة الجيب الزائدية: إذا كانت $f(x) = \sinh(x)$، **فإن** $f'(x) = \cosh(x)$.

Hyperbolic sine function: If $f(x) = \sinh(x)$, then $f'(x) = \cosh(x)$.

دالة الجيب التمامية الزائدية: إذا كانت $f(x) = \cosh(x)$، **فإن** $f'(x) = \sinh(x)$.

Hyperbolic cosine function: If $f(x) = \cosh(x)$, then $f'(x) = \sinh(x)$.

دالة الظل الزائدية: إذا كانت $f(x) = \tanh(x)$، **فإن** $f'(x) = \text{sech}(x)^2(x)$.

Hyperbolic tangent function: If $f(x) = \tanh(x)$, then $f'(x) = \text{sech}^2(x)$.

where: حيث:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

4.5.2 المشتقات المتوالية Successive derivatives

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للإشتقاق و ليكن f' مشتقها. إذا كانت الدالة المشتقة $f' : I \to \mathbb{R}$ أيضا دالة قابلة للإشتقاق فإن $f'' = (f')'$ المشتق الثاني للدالة f. بصفة عامة :

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a differentiable function, and let f' be its derivative. If the derivative function $f' : I \to \mathbb{R}$ is also differentiable, then $f'' = (f')'$ is the second derivative of the function f.
In general:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{and....} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

إذا كان المشتق $f^{(n)}$ من الدرجة n موجود، نقول f قابلة للإشتقاق n مرة.

If the nth derivative, $f^{(n)}$, exists, we say that f is differentiable n times.

2.5.2 : Theorem - نظرية

《*Leibniz's rule* علاقة ليبنيز》

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} = f^{(n)} \times g + C_n^1 f^{(n-1)} \times g^{(1)} + \cdots + C_n^k\, f^{(n-k)} \times g^{(k)} + \cdots + f \times g^{(n)}}$$

In other words: وبعبارة أخرى :

$$\boxed{(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(n-k)} \times g^{(k)}.}$$

لنبرهن بالتراجع صحة صيغة ليبنيز: من أجل $n = 0$ لدينا :

To prove the correctness of the Leibniz formula by induction: For $n = 0$, we have:

$$(f \times g)^{(0)}(x) = (f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{0} C_0^k f^{(k)}(x) g^{(0-k)}(x) = f\,(x)\, g\,(x)$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$. نفرض أن:

So, the property is true for $n = 0$. We assume that:

$$(f\times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

و لنبين أن :

and let's demonstrate that:

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

لدينا :

we have

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = ((f\times g)^{(n)})'(x).$$

إذن :

Therefore

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)'$$

و بالتالي :

so

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right)$$

إذن :

Therefore

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x).$$

نقوم بتغيير المتغير في المجموع الأول : $p = k+1$

We substitute the variable in the first sum: $p = k + 1$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) = \sum_{p=1}^{n+1} C_n^{p-1} f^{(p)}(x)g^{(n+1-p)}(x)$$

و بالتالي :

so

$$(f\times g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

Therefore　　إذن :

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(n+1)}(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)\times\left(f^{(k)}(x)\ g^{(n+1-k)}(x)\right)\right)\\ &\quad +C_n^n f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+C_n^0 f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

Note that:　　لاحظ أن :

$$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k \text{ and } C_n^n=C_n^0=1$$

Therefore:　　إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right)+f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(n+1)}(x)$$

لاحظ أنه يمكننا إدخال الحدين الأخيرين في المجموع :

$$C_{n+1}^0 f^{(0)}(x)g^{(n+1-0)}(x)=f^{(0)}(x)\ g^{(n+1)}(x)$$

and　　و

$$C_{n+1}^{n+1}f^{(n+1)}g^{(n+1-(n+1))}(x)=f^{(n+1)}(x)g^{(0)}(x).$$

Therefore:　　إذن :

$$(f\times g)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)$$

إذن حسب البرهان بالترجع لدينا :

Therefore, according to the proof by induction, we have:

$$(\forall n\in\mathbb{N},\ n\leq p)(\forall x\in I)\ :\ (f\times g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

6.2 Trigonometric functions الدوال المثلثية

الدوال المثلثية ضرورية في الهندسة، والتحليل الرياضي، والفيزياء، والهندسة لحل المشكلات المتعلقة بالزوايا، والمثلثات، والظواهر الدورية.

Trigonometric functions are essential in geometry, calculus, physics, and engineering for solving problems related to angles, triangles, and periodic phenomena.

1.6.2 الدالة تجب و قوس التجب Cosine and arccosine

لتكن الدالة تجب التي نرمز لها بالرمز cos حيث:

Let the cosine function, denoted as cos, where:

$$\begin{aligned} \cos \quad : \mathbb{R} \quad &\to [-1,1] \\ x \quad &\mapsto \cos x, \end{aligned}$$

للحصول على تقابل من هذه الدالة يكفي أخذها على المجال $[0,\pi]$. في هذه المجال، تكون الدالة تجب مستمرة ومتناقصة تماما، وبالتالي فإن الإقتصار:

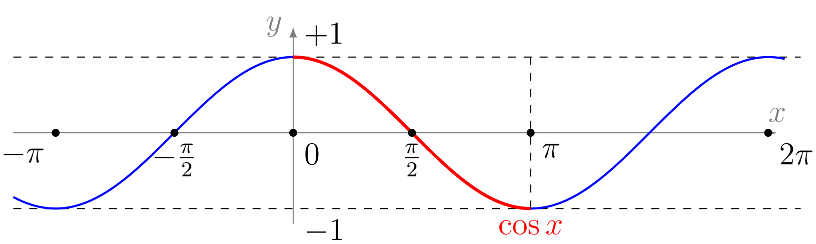
To obtain the bijection of this function, it is sufficient to restrict it to the domain $[0,\pi]$. In this domain, the function cosine is continuous and strictly decreasing. Therefore, the restriction:

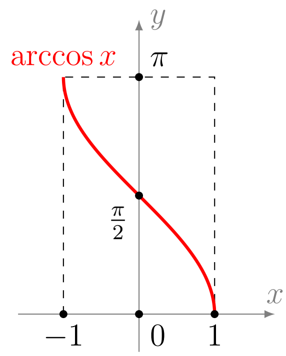
$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

هو تقابل. ودالته العكسية التقابلية تدعى قوس التجب ونكتب

is a bijection, and its inverse function, known as "arccosine", is written as:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





لذلك لدينا، من خلال تعريف التقابل العكسي :

So, through the definition of the inverse bijection:

$$\cos\big(\arccos(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$
$$\arccos\big(\cos(x)\big) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

بعبارات أخرى:

In other words:

$$\cos(x) = y \iff x = \arccos y, \qquad \text{ف} \; x \in [0, \pi]:$$

فإن مشتق الدالة العكسية هو:

The derivative of the inverse function is:

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

2.6.2 الدالة جب و قوس الجب Sine and arcsine

إقتصار الدالة جب على المجال $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ المعرف

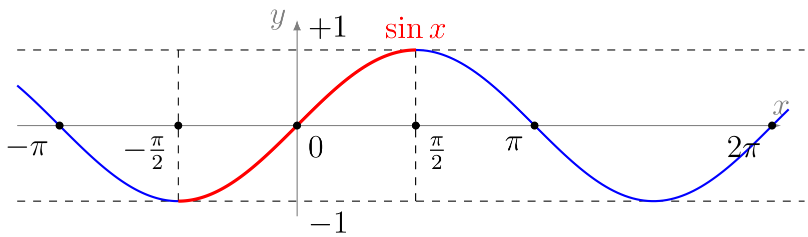
The function sine is restricted to the domain $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ defined as

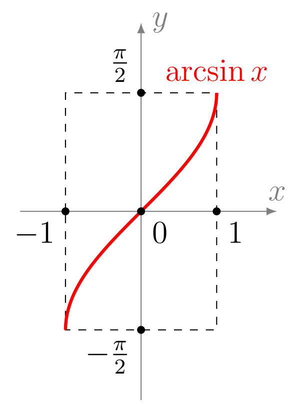
$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

هو دالة تقابلية. تقابلها العكسي يدعى قوس الجب و نرمز له بالرمز arcsine حيث:

It is a bijective function. Its inverse function is called the arc of sin, and we denote it by "arcsine", where:

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





We have: ولدينا:

$$\sin\big(\arcsin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$
$$\arcsin\big(\sin(x)\big) = x \quad \forall x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\sin(x) = y \iff x = \arcsin y, \qquad \text{فِ } x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]:$$

the derivative of the inverse function is: فإن مشتق الدالة العكسية هو:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

3.6.2 الدالة ضل و قوس الضل Tangent and arctangent

إقتصار الدالة ضل على المجال $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

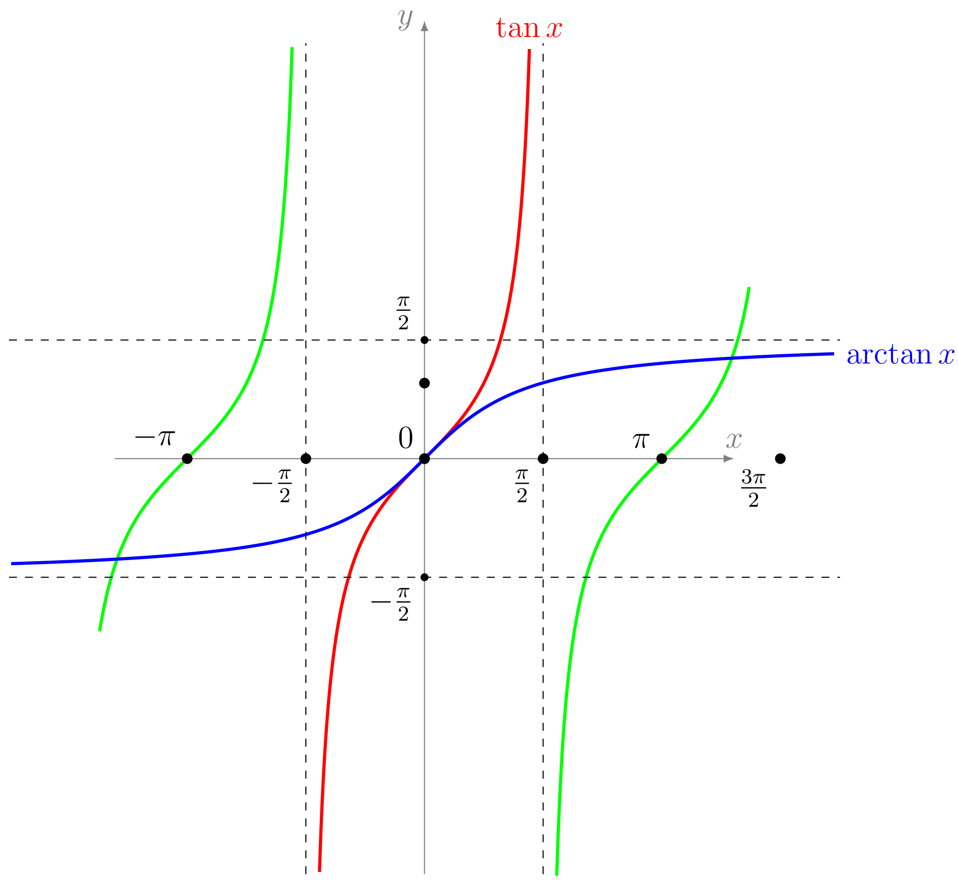
The function tangent restricted to the domain $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

$$\tan :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

هو دالة تقابلية. نسمي تقابلها العكسي بقوس الضل ونرمز له بالرمز arctangent **حيث :**

It is a bijective function. We call its inverse function the arc of tangent and we denote it by "arctangent" where:

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$



$$\begin{aligned} \tan\big(\arctan(x)\big) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) &= x \quad \forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

$$\tan(x) = y \iff x = \arctan y, \qquad \text{if:} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

the derivative of the inverse function is: **فإن مشتق الدالة العكسية هو:**

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.2 الدوال الزائدية Hyperbolic functions

الدوال الزائدية أو الدوال الزائدة في الرياضيات هي الدوال المماثلة للدوال المثلثية أو الدائرية. لأنها دوال مشتقة من دالة القطع الزائد تم تقديم هذه الدوال من قبل الرياضي السويسري جوهان هنرك لامبرت و لها خواص شبيهة جدا بالدوال المثلثية كما سيتبين لاحقا.

Hyperbolic functions in mathematics are functions similar to trigonometric or cyclic functions. They are derived from the hyperbolic function, these functions were introduced by the Swiss mathematician Johann Henrik Lambert, and they have properties very similar to trigonometric functions, as will be seen later.

1.7.2 دالة جيب التمام الزائدي ومقلوبها Hyperbolic cosine and its inverse

من أجل $x \in \mathbb{R}$، الدالة جيب التمام الزائدي هي الدالة المعرفة:

For $x \in \mathbb{R}$, the hyperbolic cosine function is defined as:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

إقتصارها على المجال $[0, +\infty[$ حيث نكتب:

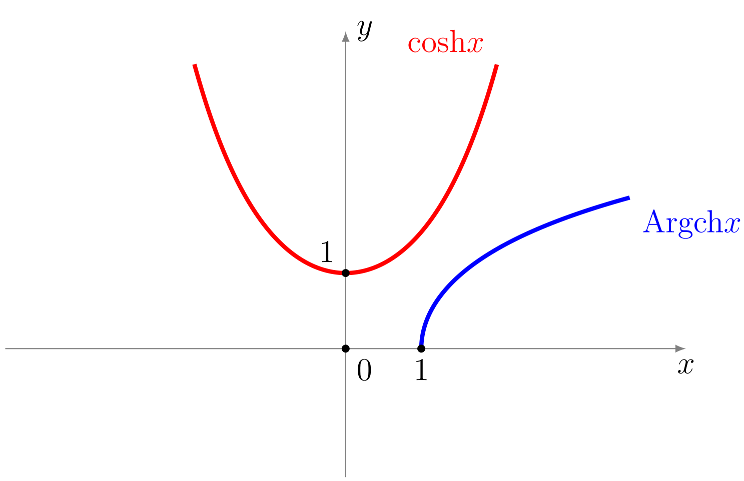
Restricting it to the domain $[0, +\infty[$ where we write:

$$\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$$

يجعل منها دالة تقابلية. نرمز لتقابلها العكسي بالرمز Argch حيث

it makes it a bijective function. We denote its inverse as Argch where:

$$\text{Argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[.$$



2.7.2 دالة الجيب الزائدي ومقلوبها Hyperbolic sine and its inverse

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ دالة الجيب الزائدي التي نرمز لها بالرمز :

For every $x \in \mathbb{R}$ the hyperbolic sine function denoted by:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

هي دالة مستمرة، قابلة للإشتقاق متزايدة تماما تحقق مايلي:

It is a continuous, completely differentiable, increasing function that achieves the following:

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$$

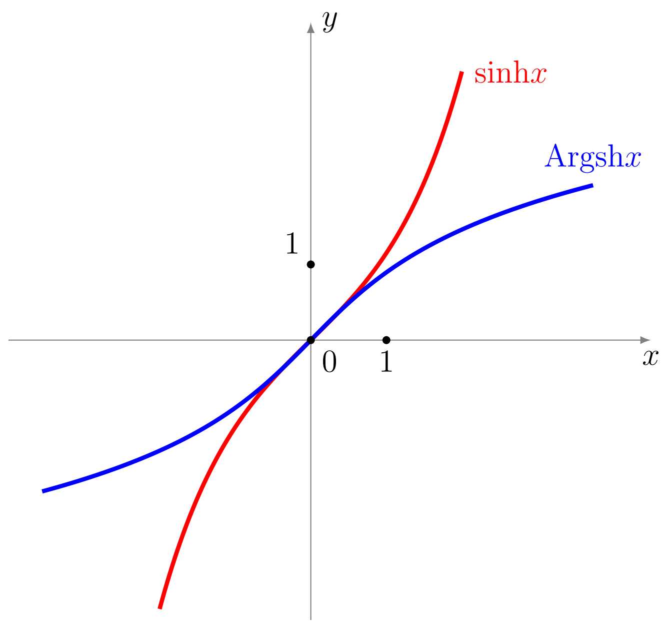
and　　　　　و

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty,$$

هذا يعني أنها دالة تقابلية. وتقابلها العكسي هو:

This means that it is a bijective function. Its inverse function is:

$$\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$



8.7.2 : Proposition - قضية

- $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
- $$\sinh' x = \cosh x \qquad \textit{and } \cosh' x = \sinh x$$

- $\mathrm{Argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متزايدة تماما و مستمرة.

$\mathrm{Argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *is a strictly increasing and continuous function.*

- Argsh دالة قابلة للإشتقاق حيث:

Argsh *is a differentiable function where:*

$$\mathrm{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

- $$\mathrm{Argsh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

3.7.2 دالة الظل الزائدي ومقلوبها Hyperbolic tangent and its inverse

بالتعريف، دالة الظل الزائدي التي نرمزلها بالرمز:

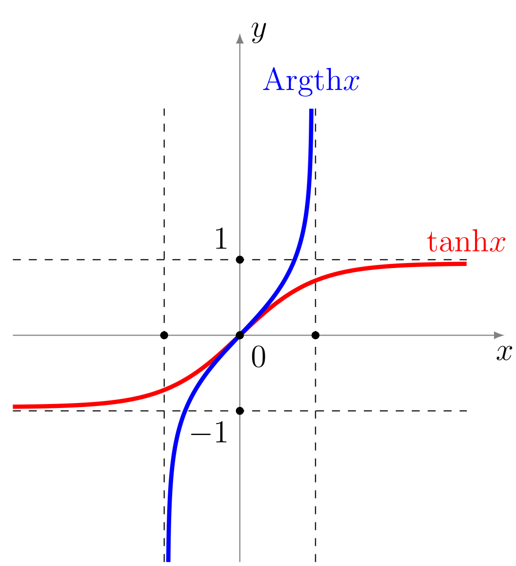
By definition, the hyperbolic tangent function denoted by:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

هي دالة معرفة $\tanh:\mathbb{R}\to]-1,1[$ وتقابلية، نرمز لتقابلها العكسي بالرمز:

It is a function known as $\tanh:\mathbb{R}\to]-1,1[$ and it is a bijective function. We denote its inverse by:

$$\mathrm{Argth}:]-1,1[\to\mathbb{R}.$$



4.7.2 العلاقات المثلثية للدوال الزائدية Trigonometric relations of hyperbolic functions

(1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(2

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b \\ \cosh(2a) &= \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1 \\ &= 1 + 2\sinh^2 a \end{aligned}$$

(3

$$\begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh a \cdot \cosh b + \sinh b \cdot \cosh a \\ \sinh(2a) &= 2\sinh a \cdot \cosh a \end{aligned}$$

(4

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \cdot \tanh b}$$

5) مشتق الدوال الزائدية

Derivative of hyperbolic functions

$$\cosh' x = \sinh x.$$

$$\sinh' x = \cosh x.$$

$$\tanh'^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

6) مشتق الدوال مقلوب الدوال الزائدية

The derivative of the inverse of hyperbolic functions

$$\begin{aligned} \mathrm{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (x > 1) \\ \mathrm{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \\ \mathrm{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2}, \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

(7

$$\begin{aligned}
\text{Argch}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad (x \geq 1)\\
\text{Argsh}x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad (x \in \mathbb{R})\\
\text{Argth}x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

8.2 النشر المحدود *Limited Expansion*

نأخذ مثال الدالة الأسية. يمكن إعطاء فكرة عن سلوك الدالة $f(x) = \exp x$ حول النقطة $x = 0$ بواسطة ظلها ، الذي تكون معادلته $y = 1 + x$. لقد قمنا بتقريب الرسم البياني بخط مستقيم.

We take the example of the exponential function. You can give an idea of the behavior of the function $f(x) = e^x$ around the point $x = 0$ using its shadow, which has the equation $y = 1 + x$. We have approximated the graph with a straight line.

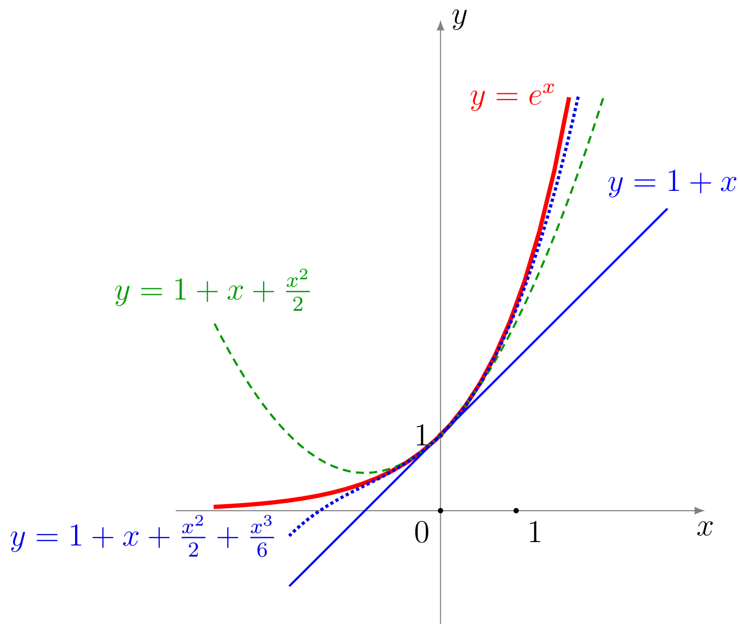
إذا أردنا أن نجد تقريب أفضل ، نأخذ مثلا المعادلة $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$، الرسم البياني للدالة f في جوار النقطة $x = 0$ هو مثل المعادلة $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. هذه المعادلة لها خاصية مميزة هي $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$ ثم $g(0) = 0$ ، $g'(0) = 0$ و $g''(0) = 0$. نعثر على معادلة القطع المكافئ يعني نجد تقريب من الدرجة 2 للدالة f.

If we want to find a better approximation, we can take, for example, the equation $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$. The graph of the function f near the point $x = 0$ is like the equation $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

This equation has a special property: $g(x) = \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$, and then $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, and $g''(0) = 0$. We can find the equation of the equivalent parabola, meaning we find a second-degree approximation for the function f.

بالطبع إذا أردنا أن نكون أكثر دقة، فسنستمر بالتقريب باستعمال الدرجة الثالثة والرابعة ...

Of course, if we wanted to be more precise, we would continue to approximate using the third and fourth degrees...



في هذا الجزء من الفصل، سوف نبحث على كثير الحدود من الدرجة n بالنسبة لأي دالة، التي تقترب من الدالة بشكل أفضل. النتائج صالحة فقط في جوار النقطة الثابتة x (غالبا ما تكون بجوار 0). سيتم حساب كثير الحدود هذا من المشتقات المتتالية عند النقطة التي تم النظر فيها.

In this part of the chapter, we will look for the nth-degree polynomial approximation for any function that provides a better fit. The results are valid only in the vicinity of a fixed point xx (often near 0). This polynomial approximation will be computed from the successive derivatives at the point under consideration.

1.8.2 Taylor formula صيغة تايلور

تسمح صيغة تايلور، التي سميت على اسم عالم الرياضيات بروك تايلور الذي أنشأها عام 1712، بتقريب دالة قابلة للتفاضل عدة مرات بجوار نقطة بواسطة كثير حدود، الذي تعتمد معاملاته فقط على مشتقات الدالة في هذه النقطة.

The Taylor formula, named after the mathematician Brook Taylor who developed it in 1712, allows for approximating a differentiable function multiple times around a point using power series, whose coefficients depend solely on the derivatives of the function at that point.

3.8.2 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ وليكن $x_0, x \in I$ و منه لدينا

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x_0, x \in I$, then we have

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0), \end{aligned}$$

where حيث

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

17.8.2 : Example - مثال

Let the function f be defined as follows: لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x) \end{aligned}$$

قابل للإشتقاق مالانهاية من المرات، سنقوم بحساب صيغ تايلور في النقطة 0 من المراتب الثلاثة الأولى.

Differentiable infinitely many times, we will compute the Taylor series at the point 0 up to the first three orders.

We have $f(0) = 0$. Then, when we calculate: لدينا: $f(0) = 0$. ثم نحسب:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0) = 1$$

Afterwards, we calculate: بعدها نحسب:

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -1.$$

Finally, we calculate: وأخيرا نحسب:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 2.$$

نستطيع أن نثبت بالتراجع أن:

We can demonstrate by induction that:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

حيث يمكن حساب القيمة :

Where the value can be calculated:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

وبالتالي من أجل $n > 0$ لدينا :

Thus for $n > 0$ we have:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

بصفة عامة، كثير الحدود لتايلور للدالة f في النقطة 0 هو

In general, the Taylor polynomial of the function f at the point 0 is

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

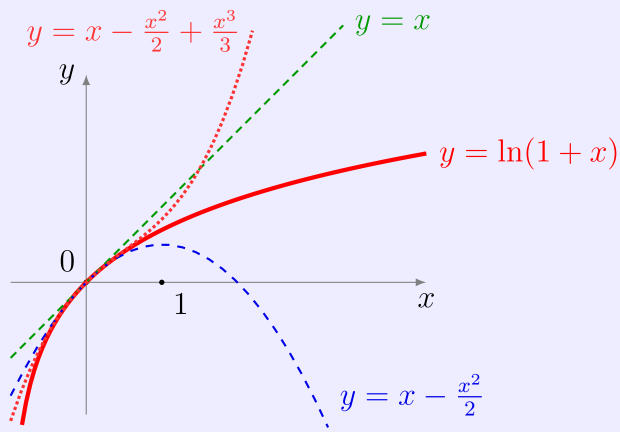
فيما يلي أول ثلاث كثيرات حدود لتايلور:

Here are the first three Taylor series expansions:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= x - \frac{x^2}{2}, \\ P_3(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

في الرسم البياني أسفله، تقترب الرسوم البيانية لكثيرات الحدود P_1 و P_2 و P_3 أكثر فأكثر من الرسم البياني لـ f وهذا فقط في جوار 0.

In the graph below, the plots of the Taylor series P_1, P_2, and P_3 approach the graph of f more and more closely, but only in the vicinity of 0.



2.8.2 صيغة ماك ـ لوران Mac-Laurent formula

4.8.2 : Theorem - نظرية

لتكن $f : I \to \mathbb{R}$ دالة من الفئة $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ وليكن $x \in I$ و منه لدينا بتطبيق صيغة تايلور في النقطة $x_0 = 0$ نجد صيغة ماك ـ لوران:

Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a function of the class $\mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ and let $x \in I$ Then have, by applying Taylor's formula at the point $x_0 = 0$, we find the Mack-Laurent formula:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon(x).}$$

18.8.2 : Example - مثال

$$1)\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$2)\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$3)(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$3.1)\quad \alpha = -1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(n)$$

$$3.2)\quad \alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1*3*5\ldots(2n-1)}{2*4*6\ldots 2n}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$4) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

3.8.2 النشر المحدود لبعض الدوال المألوفة Limited expansion of some common functions

★ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

★ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

★ $ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

★ $sh(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

4.8.2 عمليات على النشر المحدود Operations on limited expansions

رأينا سابقا من صيغة طايلور وصيغة ماك ـ لوران أنه يمكن أن نغير النشر المحدود لدالة ما في النقطة $a \in \mathbb{R}$ إلى نشر محدود في النقطة 0 ولهذا سوف نشرح العمليات على النشر المحدود فقط في النقطة 0.

We saw previously from Taylor's and the Mac-Loran formula that we can change the limited expansion of a function at the point $a \in \mathbb{R}$ to a limited expansion at the point 0. Therefore, we will explain the operations on the limited expansion only at the point 0.

لتكن $n \in \mathbb{N}$ ولتكن f و g دالتين معرفتين عند 0 تقبلان في جوار 0 النشر المحدود من الدرجة n حيث:

Let $n \in \mathbb{N}$ and let f and g be functions defined at 0 that accept in the neighborhood of 0 the limited expansion of degree n where:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ &= P_n(x) + x^n \epsilon_1(x) \end{aligned}$$

and و

$$\begin{aligned} g(x) &= q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + x^n \epsilon_2(x) \\ &= Q_n(x) + x^n \epsilon_2(x) \end{aligned}$$

9.8.2 : Proposition - قضيــة

- $f+g$ يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل مجموع نشري الحدود للدالتين f و g:
$f+g$ accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the sum of the two limited expansions of the functions f and g:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x).$$

- fg يقبل نشر محدود من الدرجة n عند 0 ويمثل جداء نشري الحدود للدالتين f و g مع الإبقاء إلا على الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n:
fg accepts a limited expansion of degree n at 0 and represents the product of the limited expansion of the functions f and g, leaving only the terms with degree less than or equal to n:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x)$$

حيث $T_n(x)$ كثير الحدود $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ المتوقف عند الدرجة n.
Where $T_n(x)$ is the polynomial $(P_n(x) \cdot Q_n(x))$ stopping at degree n.

- إذا كانت $g(0) = 0$ (أي $q_0 = 0$) فإن الدالة $f \circ g$ تقبل نشر محدود عند 0 من الدرجة n حيث جزء كثير الحدود المتوقف عند الدرجة n معرف بالتركيب $P(Q(x))$.
If $g(0) = 0$ (i.e. $q_0 = 0$) then the function $f \circ g$ accepts a limited expansion at 0 of degree n where the part of the polynomial stopping at degree n is defined by the structure $P(Q(x))$.

- إذا كان $q_0 \neq 0$ فإن لدينا:
If $q_0 \neq 0$ then we have:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{q_0} \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q_0} x + \cdots + \frac{q_n}{q_0} x^n + \frac{x^n \epsilon_2(x)}{q_0}}.$$

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f فإن F تقبل نشر محدود عند a من الدرجة $n+1$ ويكتب :
If F is a primitive function of the function f, then F accepts a limited expansion at a

of degree $n+1$ and is written:

$$F(x) = P_{n+1}(x-a) + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

where: $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$. حيث: $\lim_{x\to a} \eta(x) = 0$.

19.8.2 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $\arctan(x)$.

Calculate the limited expansion of the function $\arctan(x)$.

We know that: نعلم أن:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

We set: نضع

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

and $F(x) = \arctan(x)$ *and we write:* و $F(x) = \arctan(x)$ و نكتب:

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

because $\arctan(0) = 0$, *then:* ولأن $\arctan(0) = 0$ فإن:

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

20.8.2 : Example - مثال

- النشر المحدود للدالة $\tan x$ عند 0 من الرتبة 5.

The limited expansion of the function $\tan x$ *at* 0 *is of order* 5.

Firstly: أولا:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x).$$

On the other hand من جهة أخرى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$$

we set نضع

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x).$$

In the calculation we need u^2 and u^3: نحتاج في الحساب u^2 و u^3 :

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$$

then ثم

$$u^3 = x^5\epsilon(x).$$

so: وبالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

Finely في الأخير

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

- النشر المحدود للدالة $\frac{1+x}{2+x}$ عند 0 من الرتبة 4.

The limited expansion of the function $\frac{1+x}{2+x}$ *at* 0 *of order* 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^3+\left(\frac{x}{2}\right)^4+o(x^4)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{x^4}{32}+o(x^4),\end{aligned}$$

21.8.2 : Example - مثال

حساب النشر المحدود للدالة $h(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)$ عند 0 من الرتبة 3.

Calculate the limited expansion of the function $h(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big)$ *at* 0 *of order* 3.

- نضع $f(u)=\sin u$ و $g(x)=\ln(1+x)$ ومنه:

We set $f(u)=\sin u$ *and* $g(x)=\ln(1+x)$, *from which:*

$$f\circ g(x)=\sin\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{و} \quad g(0)=0.$$

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

We write the limited expansion of order 3 *for the function*

$$f(u)=\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+u^3\epsilon_1(u)$$

for u *in the vicinity of* 0. من أجل u في جوار 0.

We set نضع

$$u=g(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)$$

for x *in the vicinity of* 0. من أجل x في جوار 0.

- *We calculate* u^2: نحسب u^2:

$$u^2=\Big(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\epsilon_2(x)\Big)^2=x^2-x^3+x^3\epsilon_3(x)$$

and u^3 : | و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x).$$

then: | ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f\circ g(x) = f(u) \\ &= u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

9.2 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 2*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

Calculate the following limits if they exist. | أحسب النهايات التالية إذا كانت موجودة.

1. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$ **2.** $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25}$

3. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$ **4.** $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-9x+20}{x^2-25}$

Solution : الحــل

1) **لدينا** $\lim_{x\to5} x^2-11x+28 = -2$ **و** $lim_{x\to5}x^2-25=0$. **علينا الانتباه إلى إشارة المقام. من أجل** $x>5$ **لدينا** $x^2>25$ **ومنه** $\lim_{x\to5^+} x^2-25 = 0^+$. **نستنتج :**

$$\lim_{x\to5^+} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25} = -\infty.$$

2) **نسير بنفس الطريقة، لكن نلاحظ أن:** $\lim_{x\to5^-} x^2-25=0^-$. **في هذه الحالة لدينا:**

$$\lim_{x\to5^-} \frac{x^2-11x+28}{x^2-25} = +\infty.$$

3) لدينا $\lim_{x\to5} x^2-9x+20=0$، وبالتالي هي حالة عدم تعيين $0/0$. سنزيلها عن طريق تحليل البسط والمقام إلى الجذر المشترك. وبالتالي ينتج لنا:

$$x^2-25=(x-5)(x+5)$$

من ناحية أخرى

$$x^2-9x+20=(x-5)(x-4).$$

نستطيع أن نكتب:

$$\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{(x-5)(x-4)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-4}{x+5}.$$

هنا لاتوجد حالة عدم التعيين، وعليه:

$$\lim_{x\to5} x-4=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to5} x+5=10.$$

﴿4﴾ نستنتج أن:

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-9x+16}{x^2-25}=\frac{1}{10}.$$

ولسنا بحاجة لدراسة النهاية يمينا و يسارا.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

Calculate the following limits.   أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x$

Solution : الحــل

في كل حالة ، سنضرب في المرافق:

1)

$$\begin{aligned}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}&=\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{(x+4)-(x-4)}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}\\&=\frac{8}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}.\end{aligned}$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين) ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=0.$$

(2

$$\sqrt{x^2-1}-x = \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$$

يؤول المقام إلى $+\infty$ ومنه ينتج لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x = 0.$$

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Calculate the following limits.　　　　أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x$　　**2.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{x+3}$

3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}$　　**4.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}$.

Solution : الحــل

(1 **نخرج e^{2x} كعامل مشترك. نجد :**

$$e^{2x}-e^x = e^{2x}\left(1-\frac{e^x}{e^{2x}}\right) = e^{2x}(1-e^{-x}).$$

في حين $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x = +\infty.$$

(2 **نخرج e^{2x} كعامل مشترك في البسط و x في المقام نجد:**

$$\frac{e^{2x}+1}{x+3} = \frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

في حين لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} 1+e^{-2x} = 1,\ \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-2x}}{1+\frac{3}{x}} = 1.$$

من ناحية أخرى، من خلال التزايد، لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty.$$

أخيرا، نستنتج بحاصل ضرب النهايات هو:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+1}{x+3}=+\infty.$$

3) نخرج xe^x عامل مشترك من البسط و e^x من المقام نجد :

$$\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=\frac{xe^x}{e^x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=x\cdot\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}.$$

ولأن $\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$ (ليست حالة عدم تعيين)، لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ يعطينا:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}1-3e^{-x}=1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{xe^x}}{1-3e^{-x}}=1.$$

نستنتج بحاصل ضرب النهايتين أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3}=+\infty.$$

4) نخرج x^2 كعامل مشترك من البسط والمقام نجد:

$$\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}.$$

لأن $-1\leq\sin x\leq1$ لدينا من أجل كل $x>0$:

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\frac{1}{x}$$

ومنه حسب النظرية $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. نبرهن بنفس الطريقة أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. نجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\sin x}{x^2+x\cos x}=\frac{1}{1}=1.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

بإستعمال تعريف النهايات، أوجد (ϵ,δ)، لدراسة نهاية الدالة x^3 عند 1.

Using the definition of limits, find (ϵ,δ) to study the limit of the function x^3 at 1.

Solution : الحــل

نأخذ $\epsilon > 0$. نبحث عن $\delta > 0$حيث، إذا كان $|x-1| < \delta$ فإن $|x^3-1| < \epsilon$ (لأن النهاية هي 1). نستطيع أن نفرض أن $\epsilon \leq 1$ فإذا وجد δ من أجل $\epsilon = 1$، نفس الـ δ يوافق $\epsilon \geq 1$.
لكن $\delta > 0$ حيث $|x-1| < \delta$. فإن $1-\delta \leq x \leq 1+\delta$ بتكعيب الأطراف، و لأن الدالة مكعب x^3 متزايدة فإن:

$$1 - 3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 \leq 1 + 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

هذا يكافئ:

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \leq x^3 - 1 \leq 3\delta + 3\delta^2 + \delta^3.$$

يكفي أن نأخذ $\delta \in]0,1]$ حيث :

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -\epsilon$$

و

$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 \leq \epsilon.$$

نفرض أن $\delta \leq c\epsilon$ و $c > 0$ ثابت ومنه:

$$3\delta + 3\delta^2 + \delta^3 = 3c\epsilon + 9c^2\epsilon^2 + c^3\epsilon^3 \leq (3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

لأن $\epsilon \leq 1$ و

$$-3\delta + 3\delta^2 - \delta^3 \geq -3\delta - 3\delta^2 - \delta^2 \geq -(3c + 9c^2 + c^3)\epsilon$$

و باتباع نفس الحسابات، يكفي أن نجد العدد الحقيقي $c > 0$ حيث $3c + 9c^2 + c^3 \leq 1$. على سبيل المثال $c = 1/2$. من أجل $\epsilon \in]0,1]$ نبرهن أنه إذا كان $\delta = \epsilon/2$ فإن

$$|x-1| \leq \delta \implies |x^3 - 1| \leq \epsilon.$$

هذا يثبت أن نهاية x^3 عند 1 تساوي 1.

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

Let f be the function defined by:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

1) أوجد مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$ للدالة f.

Find the definition set $\mathcal{D}_f$ of the function f.

2) أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$، هل هي قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ ؟

Calculate $\lim_{x\to 0} f(x)$*, is it extendable continuously over* $\mathbb{R}$*?*

Solution : الحـــل

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

- مجموعة التعريف $\mathcal{D}_f$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_f &= \{x \neq 0\}, \\
\mathcal{D}_f &= \{1+x > 0, 1+x^2 > 0\ \} \\
&\Longrightarrow \mathcal{D}_f = \{x > -1\} \Longrightarrow \mathcal{D}_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.
\end{aligned}$$

- لحساب النهاية نضرب في المرافق ونبسط الكسر

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} * \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

f قابلة للتمديد بالإستمرار على $\mathbb{R}$ والدالة الممددة هي :

$$\widetilde{f} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

Let the function g defined on $\mathbb{R}$ *be as follows:* لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \textit{if } \ x \notin \{0, -1, 1\} \\ 0 & \textit{if } \ x = 0, -1, 1 \end{cases}$$

At which points is the function g continuous? في أي النقاط الدالة g تكون مستمرة؟

Solution : الحــل

الدالة g هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ باعتبارها مقلوب دالة مستمرة لا ينعدم مقامها.
لندرس استمرارية الدالة g عند 0. لأن

$$\lim_{x\to 0}\ln|x| = -\infty$$

لدينا:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{X\to -\infty}\frac{1}{X} = 0 = g(0).$$

الدالة g مستمرة عند 0. ثم ولأن

$$\lim_{x\to 1^+}\ln|x| = 0^+$$

فإن

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{X\to 0^+}\frac{1}{X} = +\infty \neq g(1).$$

الدالة g ليست مستمرة عند 1. بنفس الطريقة نبرهن أن g ليست مستمرة عند -1.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

1) لتكن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي
Let the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined as follows

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{if } x \leq 1, \\ a\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

حيث $a\in\mathbb{R}$ ثابت حقيقي. ماهي قيم a حتى تكون الدالة f مستمرة؟
where $a\in\mathbb{R}$ is a real constant. What are the values of a for the function f to be continuous?

2) أوجد كل قيم الثابت $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ حتى تكون الدالة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التالية مستمرة :
Find all values of the constant $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ such that the following function $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is continuous:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0, \\ \alpha e^{-x} + \beta e^{x} + \gamma x(e^{x} - e^{-x}) & \text{if } 0 < x < 1, \\ e^{2-x} & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

Solution : الحـــل

1) الدالة مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ وعلى $]-\infty;1[$. لأن f مستمرة إذا وفقط إذا كان f يقبل نهاية من اليمين ومن اليسار عند 1 ت قُ س لِمِتس و يجب أن تتساوى النهايتية، لكن لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sin(\pi/2) = a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a^2.$$

الدالة f مستمرة عند 1 إذا وفقط إذا كان $a^2 = a$ يعني إذا وفقط إذا كان $a = 1$ أو $a = 0$.

2) نفعل نفس الشيء، لكن هذه المرة علينا دراسة الاستمرارية على اليمين و على اليسار عند النقطتين 0 و 1، للدالة g من الواضح إستمرارها على المجال $]-\infty;0[$ و المجال $]0;1[$ وعلى $]1;+\infty[$. ولدينا من جهة:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \alpha+\beta.$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \alpha e^{-1} + \beta e^1 + \gamma(e^1 - e^{-1}) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = e^1.$$

الدالة g مستمرة إذا وفقط إذا كانت الثلاثية (α,β,γ) تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ e^{-1}\alpha + e^1\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1. \end{cases}$$

لحل الجملة وعلى سبيل المثال نطرح $e^{-1}L_1$ من L_2. نجد الجملة المكافئة :

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ (e^1 - e^{-1})\beta + (e^1 - e^{-1})\gamma &= e^1 - e^{-1}. \end{cases}$$

نستطيع اختزال القيمة $e^1 - e^{-1}$ من المعادلة الثانية فنجد:

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 1 \\ \beta+\gamma &= 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= \gamma \\ \beta &= 1-\gamma \\ \gamma &= \gamma \end{cases}$$

مجموعة الثلاثيات التي من أجلها الدالة g مستمرة هي: $\{(0,1,0)+\gamma(1,-1,1) : \gamma\in\mathbb{R}\}$.

Exercise N°– 8 – تمرين رقم

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ كمايلي :

Let the function f defined on $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ as follows:

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

1) أثبت أنه يمكننا تمديد الدالة f بالإستمرار عند النقطة -1.

Prove that we can extend the function f by continuing at the point -1.

2) حدد القيمة المأخوذة عند -1 لهذا التمديد.

Find the value taken at -1 for this extension.

Solution : الحـــل

ينعدم كل من البسط والمقام عند القيمة -1، لذلك لدينا حالة عدم تعيين عند حساب نهاية الدالة f عند -1. لإزالة عدم التعيين هذا، نبسط الكسر بإستخراج العامل المشترك، نجد:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

ومنه تصبح الدالة :

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1/3$$

نستنتج أن الدالة قابلة للتمديد بالإستمرار والدالة الممددة تكتب على الشكل:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{x^3+1} & \text{إذا كان} \quad x \neq -1, \\ 1/3 & \text{إذا كان} \quad x = -1. \end{cases}$$

Exercise N°– 9 – تمرين رقم

هل الدوال التالية قابلة للاشتقاق في 0 ؟

Are the following functions differentiable at 0?

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}, \qquad h(x) = |x|\sin x.$$

Solution : الحــل

حسب التعريف نحسب نسبة التزايد للدالة ونبحث فيما إذا كانت تقبل نهاية عند القيمة 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{x}{1+|x|}}{x}=\frac{1}{1+|x|}\to 1$$

عندما $0 \to x$. الدالة قابلة للإشتقاق عند 0 ومشتقها 1. بالنسبة للدالة g لدينا:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\sin(x)\sin(1/x).$$

نستعمل $|\sin x|\leq|x|$ و $|\sin(1/x)|\leq 1$ نستنتج أن:

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x}\right|\leq|x|.$$

باستعمال نظرية المقارنة، نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0.
الدالة g قابلة للإشتقاق عند 0 مع $g'(0)=0$. من أجل h لدينا:

$$\frac{h(x)-h(0)}{x}=|x|\cdot\frac{\sin x}{x}.$$

لأن $\sin x/x$ يؤول للـ 1 لما x يؤول إلى 0 و $|x|$ يؤول إلى 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه نسبة التزايد تؤول لـ 0 لما x يؤول إلى 0 ومنه h قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $h'(0)=0$.

Exercise N°– 10 – تمرين رقم

أوجد $a,b\in\mathbb{R}$ بحيث تكون الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ كما يلي:

Find $a,b\in\mathbb{R}$ such that the function f defined on $\mathbb{R}_+$ is as follows:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{if} \quad 0\leq x\leq 1,\\ ax^2+bx+1 & \text{if} \quad x>1,\end{cases}$$

differentiable at 1.   قابلة للإشتقاق عند 1.

Solution : الحــل

أولا، يجب أنتكون الدالة f مستمرة عند 1.

لدينا :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left(\sqrt{x}\right)=1=\lim_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=a+b+1.$$

ومنه:

$$a+b+1=1 \Longrightarrow b=-a.$$

لندرس قابلية الإشتقاق عند 1.

الدالة f تتطابق مع الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال $[0,1]$.

مشتق الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ هو $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$، f يقبل مشتق من يسار العدد 1 والذي قيمته $1/2$.

من جهة أخرى الدالة f تتطابق على المجال $[1,+\infty[$ مع الدالة $x \mapsto ax^2+bx+1$ ومنه مشتقها هو $x \mapsto 2ax+b$.

الدالة f إذا قابلة للإشتقاق عند 1، ومشتقها يساوي $2a+b$.

أخيرا، الدالة f قابلة للإشتقاق عند 1 إذا وفقط إذا كان:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= f'_g(1) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'_d(1) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2} = 2a+b \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 11 – تمرين رقم

أدرس قابلية إشتقاق الدوال التالية على $\mathbb{R}$:

Study the differentiability of the following functions on $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Solution : الحــل

نلاحظ أن f مستمرة عند 0، لأن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

من جهة أخرى الدالة f هي من الصنف C^1 على على $\mathbb{R}^*$.

لندرس قابلية الإشتقاق عند 0 وبالرجوع للتعريف ندرس نهاية نسبة التزايد :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0, x \to 0$$

بفضل خواص الدوال المثلثية في وجود حد علوي وسفلي نجد $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$.
وبالتالي الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0، مع $f'(0) = 0$. لكي نحدد ما إذا كانت الدالة f من الصنف C^1 عند 0، يجب دراسة استمرارية المشتق عند 0.
وعليه، من أجل $x \neq 0$ لدينا:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

نضع $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ومنه x_n يؤول إلى 0 و:

$$f'(x_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \neq f'(0).$$

وبالتالي: f' ليس مستمر عند 0، أي أن الدالة f ليست من الصنف C^1.

بنفس الطريق نعامل الدالة g لكي نبرهن أنها من الصنف C^1 على $\mathbb{R}^*$ قابلة للإشتقاق عند 0 حيث $g'(0) = 0$. إضافة على ذلك، من أجل $x \neq 0$:

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

حيث:

$$|g'(x) - g'(x)| \leq 3\,|x|^2 + |x|.$$

هذا يدل أن g' مستمر عند 0، ومنه g من الصنف C^1.

Exercise N°– 12 – تمرين رقم

أوجد في كل حالة مجموعة تعريف الدالة ثم مشتقها:

In each case, find the definition set of the function and then its derivative:

1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1,$
2) $f(x) = 5x^3 - \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x},$
3) $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x),$
4) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7},$
5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1},$
6) $f(x) = -x + 2 + \dfrac{2}{3x},$
7) $f(x) = \dfrac{1}{x+x^2},$
8) $f(x) = (2x+1)^2,$
9) $f(x) = \sqrt{x}(5x-3).$

Solution : الحـــل

الدالة f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **ومشتقها:**

$$f'(x) = 4\times 3x^2 - 5\times 2x + 1 = 12x^2 - 10x + 1$$

لكي تكون f **معرفة يجب أن يكون** $x \neq 0$ **و** $x \geq 0$. **ومنه** $\mathscr{D}_f =]0; +\infty[$. **الدالة مقلوب قابلة للإشتقاق على** $]-\infty; 0[$ **و على** $]0; +\infty[$. **بالإضافة أن الدالة الجذر التربيعي قابلة للإشتقاق على** $]0; +\infty[$. **ومنه** f **قابلة للإشتقاق على** $]0; +\infty[$ **و مشتقها:**

$$f'(x) = 15x^2 - \frac{-1}{x^2} + 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 15x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

الدالة f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\left(x^3 - 2x\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(3x^2 - 2\right) \\ &= 2x^4 - 4x^2 + 3^x 4 - 2x^2 + 3x^2 - 2 \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **لأن** $x^2 + 7 > 0$ **من أجل كل** x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x\left(x^2+7\right) - 2x\left(2x^2-3\right)}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{4x^3 + 28x - 4x^3 + 6x}{\left(x^2+7\right)^2} \\ &= \frac{34x}{\left(x^2+7\right)^2} \end{aligned}$$

الدالة f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x + 2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

الدالة f **معرفة و قابلة للإشتقاق على** $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{2}{3}\times\frac{-1}{x^2} \\ &= -1 - \frac{2}{3x^2} \end{aligned}$$

تكون الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق إذا كان $x+x^2\neq 0$. أي $x+x^2=x(x+1)$. ومنه f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$$f'(x)=-\frac{1+2x}{(x+x^2)^2}$$

الدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. $f(x)=(2x+1)(2x+1)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(2x+1)+(2x+1)\times 2\\&=4(2x+1)\\&=8x+4\end{aligned}$$

الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-3)+5\sqrt{x}\\&=\frac{5x-3+10x}{2\sqrt{x}}\\&=\frac{15x-3}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Exercise N°– 13 – تمرين رقم

أحسب المشتق من الدرجة n للدوال التالية :

Calculate the derivative of degree n for the following functions:

1).$x\mapsto xe^x$ **2**).$x\mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Solution : الحـــل

1) نضع $f(x)=xe^x$ و نكتب $f(x)=g(x)h(x)$ حيث $g(x)=x$ و $h(x)=e^x$. سوف نستعمل علاقة ليبنيتز

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)\,.$$

يتألف هذا المجموع من حدين فقط. في الواقع ، لدينا $g(x)=x$، $g'(x)=1$، $g^{(k)}(x)=0$، $k\geq 2$. ولأنه لدينا أيضا $h^{(k)}(x)=e^x$ من أجل كل $k\geq 0$ فإن:

$$f^{(n)}(x)=xe^x+ne^x=(x+n)e^x.$$

2) المشتق من الدرجة n للدالة:

$$x^{n-1}\ln(1+x)$$

نضع $g(x)=x^{n-1}$ و $h(x)=\ln(1+x)$ اللذين هم من الصنف C^∞ على المجموعتين $\mathbb{R}$، و $]-1,+\infty[$ على الترتيب. نبرهن إذن بالتراجع:

$$g^{(k)}(x)=(n-1)\dots(n-k)x^{n-1-k}=\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}x^{n-1-k},$$

لأن:

$$h^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

من أجل $k>0$. نضع $f(x)=x^{n-1}\ln(1+x)$ ونكتب　　we write: $f(x)=g(x)h(x)$. نستعمل علاقة ليبنيتز حيث $g^{(n)}=0$ نجد:

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^k}.$$

إذا كان $x=0$ نجد أن $f^(n)(0)=n!$. إذا كان $x\neq 0$، نقسم على x لجعله مجموع مبسط، وباستعمال علاقة ثنائي الحد نجد:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^k\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\left(1+\frac{-x}{1+x}\right)^n\right)\\
&= \frac{(n-1)!}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)^n}\right).
\end{aligned}$$

Exercise N°– 14 – تمرين رقم

لتكن $n\in\mathbb{N}$. أثبت أن المشتق من الدرجة $n+1$ للدالة $x^ne^{1/x}$ هو

Let $n\in eN$. Prove that the derivative of degree $n+1$ of the function $x^ne^{1/x}$ is

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}.$$

Solution : الحـــل

الدالة من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}^*$. لنثبت العلاقة المطلوبة بالتراجع على n.

لدينا، من أجل $n=0$، مشتق الدالة $e^{1/x}$ هو $\frac{-1}{x^2}e^{1/x}$. ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n أي :

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}$$

ولنبرهن صحتها من أجل $n+1$. لهذا نكتب الدالة $x^n e^{1/x}$ على الشكل $x \cdot x^{n-1}e^{1/x}$ ثم نستعمل صيغة ليبنيز لكي نبرهن :

$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}$$

نجد:

$$\begin{aligned}
\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} &= \left(x\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)\right)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k \cdot x^{(k)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-k)} \\
&= C_n^0 \cdot x^{(0)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-0)} + C_n^1 \cdot x^{(1)} \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1-1)} \\
&= 1 \cdot x \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} + (n+1) \cdot \left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} \\
&= x \cdot \left(\frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}}\right)' + (n+1) \cdot \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} \\
&= x \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+3}} e^{\frac{1}{x}} (x + nx + 1) + (n+1) \cdot \frac{(-1)^n e^{1/x}}{x^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Exercise N°– 15 – تمرين رقم

أوجد النشر المحدود في النقطة a من الرتبة n للدوال التالية:

Find the finite diffusion at point a of order n for the following functions:

$$\begin{array}{lll}
1) & \ln(\cos(x)) & n=6,\quad a=0. \\
2) & \dfrac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x} & n=2,\quad a=0. \\
3) & \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) & n=3,\quad a=0. \\
4) & \ln(\sin(x)) & n=3,\quad a=\frac{\pi}{4}. \\
5) & (1+x)^{\frac{1}{x}} & n=3,\quad a=0.
\end{array}$$

Solution : الحـــل

- $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o\left(x^7\right)$.
- $\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = 2 - \frac{11}{10}x^2 + o\left(x^3\right)$.
- $\ln(\tan(1/2\,x + 1/4\,\pi)) = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^4\right)$.
- $\ln(\sin x) = \ln(1/2\,\sqrt{2}) + x - \frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
- $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - 1/2\,ex + \frac{11}{24}\,ex^2 - \frac{7}{16}\,ex^3 + o\left(x^3\right)$.

Exercise N°– 16 – تمرين رقم

أوجد النشر المحدود للدالة $h(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big)$ عند 0 من الرتبة 3.

Find the limited expansion of the function $h(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big)$ at 0 up to the order 3.

Solution : الحـــل

- نضع

$$f(u) = \cos(u) \quad \text{and} \quad g(x) = \ln(1+x)$$

ومنه :

$$f \circ g(x) = \cos\big(\ln(1+x)\big) \quad \text{and} \quad g(0) = 0$$

.

- نكتب النشر المحدودمن الرتبة 3 للدالة

$$f(u) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u)$$

من أجل u في جوار 0.

- نضع

$$u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$$

من أجل x في جوار 0.

- نحسب u^2:

$$u^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)\right)^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$$

و u^3 :

$$u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$$

.

- ومنه:

$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ g(x) = f(u) \\ &= 1 - \frac{u^2}{2!} + u^3\epsilon_1(u) \\ &= 1 - \frac{x^2 - x^3}{2!} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

القسم الثاني

الجزء الثاني : الجبـــــر 1

Part Two

Algebra 1

الفصل الثالث

الفضاءات الشعاعية *Vector Spaces*

فهرس الفصل

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء

الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات، كما يُعد تكملة للدرس السابق المجموعات.

This chapter is considered one of the most important sections that form the foundation of linear algebra theories. It serves as a fundamental part for subsequent concepts like linear applications, matrices, determinants, and is also a continuation of the previous lesson on sets.

1.3 *Algebraic structures* البنى الجبرية

1.1.3 Internal composition العملية الداخلية

1.1.3 : Definition - تعريف

لتكن E مجموعة بحيث $E \neq \emptyset$.

Let E be a set such that $E \neq \emptyset$.

نسمي قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية كل تطبيق معرف على $E \times E$ ويأخذ قيمه في E.

We call an internal composition law or internal composition every application defined on $E \times E$ and taking its values in E.

ونرمز له عادة بـالرموز: $\star$ ، Δ، $\perp$ . . . فنكتب مثلا:

We usually symbolize it with the symbols: $\star$, Δ, $\perp$ . . . , so we write, for example:

$$\boxed{\star : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x, y) \to x \star y \end{array}}$$

وتكون العملية $\star$ داخلية في E إذا تحقق ما يلي:

The operation $\star$ is Internal composition to E if the following is true:

$$\boxed{\forall x, y \in E : x \star y \in E}$$

أي أن نقول إن العملية الداخلية $\star$ مستقرة في E.

that is, we say that the internal composition $\star$ is stable in E

1.1.3 : Example - مثال

لكن المجموعة $E = \{0,1,6,9,8\}$ ومنه $+$ ليست عملية داخلية في E. لأن $9+8=17 \notin E$

Let the set $E = \{0,1,6,9,8\}$ from which $+$ is not an internal composition in E. Because $9+8=17 \notin E$

2.1.3 : Example - مثال

$(+)$ عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

$(+)$ *is an internal composition in* $\mathbb{R}$.

لإثبات أن $(+)$ هي عملية داخلية في $\mathbb{R}$، نحتاج إلى إظهار أنه بالنسبة لجميع العناصر $a,b \in \mathbb{R}$، مجموعهم $a+b$ يكون أيضاً في $\mathbb{R}$.
بعبارة أخرى، نحتاج إلى أن نثبت أن مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت الجمع.
بما أن $\mathbb{R}$ تمثل مجموعة جميع الأعداد الحقيقية، فإنها تشمل كل من الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة جمع اثنين من الأعداد الحقيقية ينتج عنه عدد حقيقي آخر، بغض النظر عما إذا كانت ناطقة أو غير ناطقة. هذه الخاصية هي سمة أساسية للأعداد الحقيقية، وبالتالي يتبين أن $(+)$ هي فعلاً عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

To prove that $(+)$ is an internal composition in $\mathbb{R}$, we need to show that for all $a,b \in \mathbb{R}$, their sum $a+b$ is also in $\mathbb{R}$.
In other words, we need to demonstrate that the set of real numbers is closed under addition.
Since $\mathbb{R}$ represents the set of all real numbers, it includes both rational and irrational numbers.
Addition of two real numbers results in another real number, regardless of whether they are rational or irrational. This property is a fundamental characteristic of real numbers, and it follows that $(+)$ is indeed an internal composition in $\mathbb{R}$.

2.1.3 الزمرة Group

تعتبر الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية والمهمة في الجبر المجرد لكونها ضرورية من أجل فهم واستيعاب البنى الجبرية المجردة الأخرى: كالحلقات والحقول والفضاءات وتستخدم نظرية الزمر في تصنيف جمل النقاط منتظمة المواقع في الفضاء وتعتبر هذه المسألة من أبرز المسائل المهمة في علم البلورات إضافة إلى دورها الفعال في استكشاف قانون الربط بين جزيء المادة وزمرة معينة. وفي الوقت الحاضر يصعب علينا تصور أي تطور لبنية نظرية الجزيئات دون مساعدة نظرية الزمر.

Groups are considered one of the fundamental and important algebraic structures in abstract algebra. They are essential for understanding and grasping other abstract algebraic structures, such as rings, fields, and vector spaces. Group theory is used in classifying sets of regularly arranged points in space, making it crucial in the field of crystallography. Additionally, it plays a significant role in exploring the relationship between the molecular structure of matter and a specific group. Nowadays, it is challenging to envision any advancement in the theoretical structure of molecules without the assistance of group theory.

2.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن $(G,\star)$ تشكل زمرة حيث G مجموعة مزودة بعملية داخلية $\star$ إذا تحققت الشروط الأربعة التالية:

We say that $(G,\star)$ forms a group, where G is a set equipped with an internal operation $\star$, if the following four conditions are satisfied:

1) $(\star)$ **قانون داخلي**

$(\star)$ *Internal law*

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y \in G.$$

2) $(\star)$ **قانون تجميعي**

$(\star)$ *Associated law*

$$\forall x, y, z \in G, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

3) $\star$ **قانون يقبل عنصر حيادي وحيد**

$(\star)$ *A law that accepts a single neutral element*

$$\exists! e \in G, \quad \forall x \in G, x \star e = x \quad \text{and} \quad e \star x = x,$$

4) **لكل عنصر من G نظير بالنسبة للعملية $\star$**

Each element of G has an opposite with respect to the law $(\star)$

$$\forall x \in G, \quad \exists x' \in G : \quad x \star x' = x' \star x = e.$$

x' يسمى بمقلوب x ويرمز له بالرمز x^{-1}.

x' is called the opposite of x and is represented by x^{-1}.

If we add the condition إذا أضفنا الشرط

$$\forall x, y \in G, \quad x \star y = y \star x,$$

we say that $(G, \star)$ *forms a commutative group* نقول أن $(G, \star)$ تشكل زمرة تبديلية

3.1.3 : Example - مثال

The set $(\mathbb{R}, +)$ *forms a commutative group* المجموعة $(\mathbb{R}, +)$ تشكل زمرة تبديلية

To prove that the set $(\mathbb{R}, +)$ forms a commutative group, we need to show that it satisfies the four group axioms: closure, associativity, identity element, and inverse element.
Additionally, for commutativity, we need to demonstrate that the operation $(+)$ is commutative.
Let's go through each axiom:
Closure: For any two real numbers a and b, their sum $a + b$ is also a real number, so closure is satisfied.
Associativity: For all real numbers a, b, and c, the addition operation is associative, meaning $(a + b) + c = a + (b + c)$. This property holds in $\mathbb{R}$.
Identity Element: There exists an identity element, denoted as 0, such that for any real number a, $a + 0 = 0 + a = a$. In this case, the identity element is 0.
Inverse Element: For each real number a, there exists an inverse element, denoted as $-a$, such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$. This property holds because every real number has an additive inverse in $\mathbb{R}$.
Commutativity: The operation of addition is commutative in $\mathbb{R}$, meaning that for any real numbers a and b, $a + b = b + a$.
Since all five properties are satisfied, the set $(\mathbb{R}, +)$ forms a commutative group.

4.1.3 : Example - مثال

لتكن المجموعة $E \neq \emptyset$ و $\mathscr{L}(E)$ مجموعة التطبيقات التقابلية المزودة بعملية التركيب

Let the set $E \neq \emptyset$ *and* $\mathscr{L}(E)$ *be the set of bijective applications with the composition operation*

$$\circ : \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (f, g) \to f \circ g \end{array}$$

المجموعة $(E, \circ)$ تشكل زمرة ليست تبديلية

The set $(E, \circ)$ forms a non-commutative group

لتكن $(G, \star)$ زمرة.

Let $(G, \star)$ be a group.

3.1.3 : Definition - تعريف

لتكن $H \subset G$ زمرة جزئية من G إذا كان :

- $e \in H$
- من أجل كل $x, y \in H$ فإن $x \star y \in H$.
- من أجل كل $x \in H$ فإن $x^{-1} \in H$.

Let $H \subset G$ be a subgroup of G if:

$e \in H$

For every $x, y \in H$ then $x \star y \in H$.

For every $x \in H$ then $x^{-1} \in H$.

3.1.3 The ring الحلقة

الحلقة هي هيكل جبري مهم يتألف من مجموعة من العناصر وعمليتين داخليتين، يجب أن تكون هذه العمليتين مغستقرتين في المجموعة، مما يعني أن نتيجة العمليتين لأي عنصرين من المجموعة هي أيضا عنصر في المجموعة. بالإضافة إلى ذلك، يجب أن تكون هناك عنصر محايد لأحد العمليات وعنصر عكسي لكل عنصر في المجموعة.

A rings is an important algebraic structure composed of a set of elements and two internal operations. These operations must be closed within the set, meaning that the result of applying these operations to any two elements in the set must also be an element within the set. Additionally, there should exist a neutral element for one of the operations and an inverse element for each element in the set.

4.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن $(A, \Delta, \star)$ المزودة بالعمليتين الداخليتين $\star$ و Δ أنها تشكل حلقة إذا تحققت ما يلي:

We say that $(A, \Delta, \star)$ with the two internal law $\star$ and Δ forms a ring if the following is true:

1) $(A, \star)$ زمرة تبديلية

$(A, \star)$ is a commutative group

2) Δ تجميعية — *Δ is associative*

$$\forall x, y, z \in A: \quad (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z).$$

3) $\star$ توزيعية على Δ — *$\star$ is distributive on Δ*

$$\forall x, y, z \in A: \quad x \star (y\Delta z) = (x \star y)\Delta(x \star z).$$

إذا تحقق الشرط — *If the condition is met*

$$\exists! e \in A: \quad \forall x \in A, x\Delta e = e\Delta x = x,$$

نقول أن الحلقة $(A, \Delta, \star)$ حلقة واحدية.

we say that the ring $(A, \Delta, \star)$ is a unit ring.

إذا تحقق الشرط — *If the condition is met*

$$\forall x, y \in A: \quad x\Delta y = y\Delta x,$$

نقول أن الحلقة $(A, \Delta, \star)$ حلقة تبديلية.

we say that the ring $(A, \Delta, \star)$ is a commutative ring.

5.1.3 : Example - مثال

المجموعة $(\mathbb{R}, +, \times)$ تشكل حلقة تبديلية واحدية.

The set $(\mathbb{R}, +, \times)$ forms a unit commutative ring.

To prove that the set $(\mathbb{R}, +, \times)$ forms a unit commutative ring, we need to show that it satisfies all the properties of a unit commutative ring:

1) Closure under addition: For all real numbers a and b, $a + b$ is a real number, which satisfies closure under addition.

2) Closure under multiplication: For all real numbers a and b, $a \cdot b$ is a real number, which satisfies closure under multiplication.

3) Associativity of addition and multiplication: Addition and multiplication of real numbers are both associative operations, so this property holds.

4) Commutativity of addition and multiplication: Addition and multiplication of real numbers are both commutative operations, so this property holds.

5) Existence of additive identity (unit element): The real number 0 serves as the additive identity since for all real numbers a, we have $a + 0 = 0 + a = a$.

6) Existence of multiplicative identity (unit element): The real number 1 serves as the multiplicative identity since for all real numbers a, we have $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

7) Existence of additive inverses: For every real number a, there exists an additive inverse $-a$ such that $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

8) Distributive property: The distributive property holds for multiplication over addition in the set of real numbers, i.e., for all real numbers a, b, and c, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Since all these properties are satisfied by the set $(\mathbb{R}, +, \times)$, it forms a unit commutative ring.

4.1.3 الجسم أو الحقل Field

الحقل في الرياضيات هو هيكل جبري أكثر تعقيدا من الحلقة. الحقل يتكون من مجموعة من العناصر مع تعريفين على الأقل للعمليات الرياضية: الجمع والضرب. هذه العمليات يجب أن تكون مستقرة داخل المجموعة وتلبي مجموعة من الشروط. وأمثلة على حقول تشمل الأعداد الحقيقية والأعداد النسبية والأعداد العقدية كمثال. هذه الهياكل الجبرية تلعب دورا أساسيا في العديد من فروع الرياضيات والعلوم.

A field in mathematics is a more complex algebraic structure than a ring. It consists of a set of elements with at least two defined mathematical operations: addition and multiplication. These operations must be closed within the set and meet a set of conditions. Examples of fields include real numbers, rational numbers, and complex numbers, among others. These algebraic structures play a fundamental role in various branches of mathematics and the sciences.

5.1.3 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة $\mathbb{K}$ حيث $\mathbb{K} \neq \phi$ أنها جسم أو حقل المزودة بالعمليتين الداخليتين $\star$ و Δ إذا تحققت ما يلي:

We say that the set $\mathbb{K}$ where $\mathbb{K} \neq \phi$ is a field endowed with the two internal laws $\star$ and Δ if the following statements is true:

1) $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ حلقة

$(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ is a ring.

2) $(\mathbb{K}_{-\{e\}}, \Delta)$ زمرة، حيث $\{e\}$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية Δ

$(\mathbb{K}_{-\{e\}}, \Delta)$ is a group, where $\{e\}$ is the neutral element with respect to the internal operation Δ

إذا تحقق الشرط

If the condition holds.

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : \quad x\Delta y = y\Delta x,$$

نقول أن الجسم $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ تبديلي.

We say that the structure $(\mathbb{K}, \star, \Delta)$ is a commutative field.

6.1.3 : Example - مثال

المجموعة $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ تشكل جسم تبديلي.

The set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field.

To prove that the set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field, we need to show two things: $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group (commutative group) under addition. $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an abelian group (commutative group) under multiplication, where $\mathbb{Q} \setminus 0$ is the set of nonzero rational numbers. Let's prove these two properties:

1) $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group:

Closure: For any two rational numbers a and b in $\mathbb{Q}$, $a + b$ is also a rational number, so closure under addition holds.

Associativity: Addition is associative for all rational numbers. That is, for any $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Identity Element: The identity element for addition is 0, as $a + 0 = 0 + a = a$ for all $a \in \mathbb{Q}$.

Inverse Element: For every $a \in \mathbb{Q}$, the additive inverse (negative) of a is $-a$, and $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Commutativity: Addition is commutative, meaning $a + b = b + a$ for all $a, b \in \mathbb{Q}$.

Therefore, $(\mathbb{Q}, +)$ is an abelian group.

2) $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an abelian group:

Closure: For any two nonzero rational numbers a and b, $a \cdot b$ is also a nonzero rational number, so closure under multiplication holds.

Associativity: Multiplication is associative for all nonzero rational numbers. That is, for any $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus 0$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Identity Element: The identity element for multiplication is 1, as $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in \mathbb{Q} \setminus 0$.

Inverse Element: For every nonzero rational number a, the multiplicative inverse (reciprocal) of a is $\frac{1}{a}$, and $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Commutativity: Multiplication is commutative, meaning $a \cdot b = b \cdot a$ for all $a, b \in \mathbb{Q} \setminus 0$.

Therefore, $(\mathbb{Q} \setminus 0, \cdot)$ is an Abelian group.

Since both conditions are satisfied, the set $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ forms a commutative field.

2.3 الفضاء الشعاعي Vector space

يعتبر هذا الجزء من أهم الفصول التي تُبنى عليها نظريات الجبر الخطي، إذ أنه يمثل الجزء الأساسي لما سيأتي بعده من مفاهيم، مثل التطبيقات الخطية، المصفوفات، المحددات... الخ، كما أنه يُعد تكملة لدروس الفصول الماضية مثل فصل المجموعات والبُنى الجبرية...

This part is one of the most important chapters upon which linear algebra theories are built. It represents the fundamental part for what will follow in terms of concepts, such as linear applications, matrices, determinants, etc. It also serves as a continuation of the lessons from previous chapters, such as the chapter on sets and algebraic structures...

6.2.3 : Definition - تعريف

نقول أن المجموعة $E \neq \emptyset$ أنها فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ إذا كانت مزودة بمايلي:

We say that the set $E \neq \emptyset$ is a vector space on the commutative field $\mathbb{K}$ if it has the following:

- قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية أي التطبيق المعرف من $E \times E$ نحو E حيث:

The law of an internal structure or internal operation, i.e. the application defined from $E \times E$ towards E where:

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

- قانون تركيب خارجي أو عملية خارجية أي التطبيق المعرف من $\mathbb{K} \times E$ نحو E حيث:

The law of an external structure or external operation, i.e. the defined application from $\mathbb{K} \times E$ towards E where:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

الذي يحقق الشروط التالية:

which fulfills the following conditions:

1) $$\forall u, v \in E : u + v = v + u.$$

2) $$\forall u, v, w \in E : u + (v + w) = (u + v) + w.$$

3) يوجد عنصر حيادي $0_E \in E$ حيث

There is a neutral element $0_E \in E$ where

$$\forall u \in E : u + 0_E = u.$$

4) كل عنصر $u \in E$ يقبل عنصر نظير u' حيث

Every element $u \in E$ accepts an opposite element u' where

$$u + u' = 0_E.$$

نرمز للنظير u' بالرمز $(-u)$.

we denote the opposite element u' by $-u$.

5) $$\forall u \in E : 1 \cdot u = u,$$

6) $$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E : \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u.$$

7) $$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

8) $$\forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

في ما بعد، و حتى نهاية الفصل:

From now on, and until the end of the chapter:

- كل حقل نصادفه هو حقل تبديلي.

Every field we encounter is a commutative field.

- عناصر الفضاء الشعاعي تسمى أشعة وعناصر الحقل تسمى سلميات.

The elements of the vector space are called rays, and the elements of the field are called scalars.

- كل فضاء شعاعي يشتمل على الاقل على الشعاع المعدوم و ومنه من غير الممكن ان يكون خاليا.

Every vector space contains at least the zero ray, and it cannot be empty.

- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{R}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي حقيقي (على حقل الأعداد الحقيقية).

If $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, we say that E is a real vector space (over the field of real numbers).

- إذا كان $\mathbb{K}=\mathbb{C}$، نقول عن E أنه فضاء شعاعي تخيلي (على حقل الأعداد التخيلية).

If $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, we say that E is an imaginary ray space (over the field of complex numbers).

7.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathbb{R}^2$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، أي : نضع $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ و $E=\mathbb{R}^2$. ومنه

Let $\mathbb{R}^2$ be the vector space defined on the field $\mathbb{R}$, that is: we set $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ and $E=\mathbb{R}^2$. Then

كل عنصر $u\in E$ هو الزوج (x,y) حيث x عنصر من $\mathbb{R}$ و y عنصر من $\mathbb{R}$. ونكتب

Each element $u\in E$ is a pair (x,y) where x is an element of $\mathbb{R}$ and y is an element of $\mathbb{R}$, and we write

$$\mathbb{R}^2=\big\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\big\}.$$

- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الداخلي $(+)$ *We define on $\mathbb{R}^2$ the internal law denoted by $(+)$*

ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من $\mathbb{R}^2$ ومنه:

Let (x,y) and (x',y') be two elements of $\mathbb{R}^2$, then:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y').$$

- نعرف على $\mathbb{R}^2$ القانون الخارجي $(\cdot)$

We define on $\mathbb{R}^2$ the external law denoted by $(\cdot)$

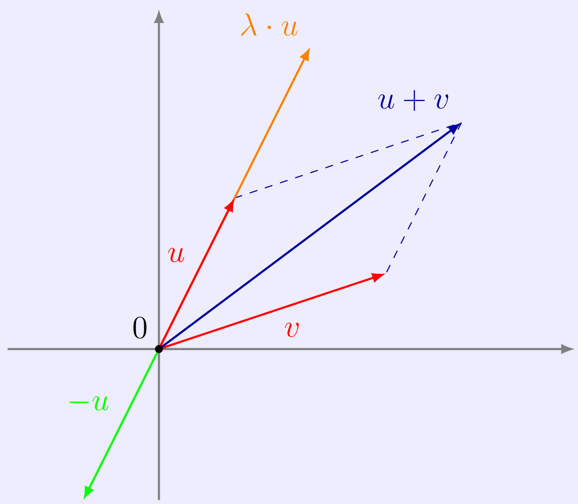
ليكن (x,y) عنصر من $\mathbb{R}^2$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

Let (x, y) be an element of $\mathbb{R}^2$ and λ be an element of $\mathbb{R}$, then:

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0,0)$. والعنصر النظير لكل عنصر (x,y) هو العنصر $(-x,-y)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x,y)$.

The neutral element for the internal additive operation is the null vector $(0, 0)$. The opposite element of each element (x, y) is the element $(-x, -y)$, which we may also denote by $-(x, y)$.



8.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathbb{R}^n$ الفضاء الشعاعي المعرف على الحقل $\mathbb{R}$، ليكن n عدد طبيعي أكبر من 1. نضع $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ و $E = \mathbb{R}^n$.

Let $\mathbb{R}^n$ be the vector space defined on the field $\mathbb{R}$, and let n be a natural number greater than 1. We set $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ and $E = \mathbb{R}^n$.

كل عنصر $u \in E$ هو إذا الشعاع $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر من $\mathbb{R}$. ونكتب:

Each element $u \in E$ is then the vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are elements of $\mathbb{R}$, and we write:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots\}.$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الداخلي $(+)$		*We define on $\mathbb{R}^n$ the internal law $(+)$*

ليكن $(x_1, \ldots, x_n)$ و $(x'_1, \ldots, x'_n)$ عنصرين من $\mathbb{R}^n$ ومنه:

Let $(x_1,\ldots,x_n)$ and $(x'_1,\ldots,x'_n)$ be two elements of $\mathbb{R}^n$, then:

$$(x_1,\ldots,x_n)+(x'_1,\ldots,x'_n)=(x_1+x'_1,\ldots,x_n+x'_n).$$

- نعرف على $\mathbb{R}^n$ القانون الخارجي $(\cdot)$

We define on $\mathbb{R}^n$ the external law $(\cdot)$

ليكن $(x_1,\ldots,x_n)$ عنصر من $\mathbb{R}^n$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه:

Let $(x_1,\ldots,x_n)$ be an element of $\mathbb{R}^n$ and λ be an element of $\mathbb{R}$, then:

$$\lambda\cdot(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n).$$

العنصر الحيادي بالنسبة للعملية الداخلية الجمع هو الشعاع المعدوم $(0,0,\ldots,0)$. والعنصر النظير لكل عنصر $(x_1,\ldots,x_n)$ هو العنصر $(-x_1,\ldots,-x_n)$ الذي قد نرمز له أيضا بالرمز $-(x_1,\ldots,x_n)$.

The neutral element for the internal additive process is the null vector $(0,0,\ldots,0)$. The opposite element of each element $(x_1,\ldots,x_n)$ is the element $(-x_1,\ldots,-x_n)$, which we may also denote by the symbol $-(x_1,\ldots,x_n)$.

بنفس المنوال يمكن إنشاء الفضاء $\mathbb{C}$ و $\mathbb{C}^n$ على الحقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$.

In the same way, the space $\mathbb{C}$ and $\mathbb{C}^n$ can be constructed on the field $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

9.2.3 : Example - مثال

الفضاء الشعاعي للدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

The vector space of functions defined from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$.

لتكن $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. نزودها ببنية الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}$ كما يلي:

Let $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ be the set of functions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. We provide it with the vector space structure $\mathbb{R}$ as follows:

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الداخلي $(+)$

We define on $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the internal law $(+)$

لتكن f و g عنصرين من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ومنه $f+g$ معرف كما يلي:

Let f and g be elements of $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Then $f+g$ is defined as follows:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

- نعرف على $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ القانون الخارجي$(\cdot)$

We define on $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ the external law$(\cdot)$

لتكن f دالة من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و λ عنصر من $\mathbb{R}$ ومنه نعرف جداء دالة بسلمي كما يلي:

Let f be a function of $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ and λ an element of $\mathbb{R}$, then we define the product of a scalar with function as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

أو بكل بساطة نكتب

Or simply write

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

- نعرف العنصر الحيادي بالنسبة للجمع بأنه الدالة المعدومة المعرفة كما يلي:

  We define the neutral element with respect to the addition as the zero function as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

يمكن أن نرمز لها بالرمز $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

We can denote it as $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

- العنصر النظير للدالة f من $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ هو الدالة g المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

  The opposite function of the function f in $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ is the function g defined from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ as follows:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -f(x).$$

نرمز لنظير f بالنسبة للجمع بالرمز $(-f)$.

We denote the opposite function of f for addition by $(-f)$.

1.2.3 جداء الفضاءات الشعاعية Product of vector spaces

7.2.3 : Definition - تعريف

ليكن $\mathbb{K}$ حقلا تبديليا ولتكن $E_1, E_2, \ldots, E_n$ فضاءات شعاعية على الحقل $\mathbb{K}$. نعرف على $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ العمليتين الداخليتين $(+)$ و $(\cdot)$ كما يلي:

Let $\mathbb{K}$ be a commutative field and let $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be vector spaces on the field $\mathbb{K}$. We *define by $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ the two internal operations $(+)$ and $(\cdot)$ as follows:*

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E :\\
&1)\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\
&2)\ \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n).
\end{aligned}$$

عندئذ $(E,+,\cdot)$ يمثل فضاء شعاعي يسمى فضاء الجداء. يكون العنصر الحيادي في هذا الفضاء هو شعاع العناصر الحيادية لكل فضاء ونكتب

Then $(E,+,\cdot)$ represents a vector space called the product space. The neutral element in this space is the ray of the neutral elements of each space, and we write:

$$0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_n}) .$$

2.2.3 الحساب في الفضاءات الشعاعية Calculus in vector spaces

1.2.3 : Proposition - قضيــة

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. وليكن $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$. ومنه لدينا:

Let E be a vector space on the field $\mathbb{K}$. Let $u \in E$ and $\lambda \in \mathbb{K}$. Then, we have:

$$0 \cdot u = 0_E \quad (1$$

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E \quad (2$$

$$(-1) \cdot u = -u \quad (3$$

$$u = 0_E \ \ where \ \ \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \quad (4$$

$$\lambda \cdot u = 0_E \Longrightarrow (\lambda = 0_{\mathbb{K}}) \vee (u = 0_E) \quad (5$$

6) العملية التي ترفق بـ (u,v) الصورة $u+(-v)$ تسمى الطرح، ويرمز للشعاع $u+(-v)$ بالرمز $u-v$. ومنه لدينا الخواص التالية:

The operation that attaches to (u,v) the image $u+(-v)$ is called subtraction, and the *vector $u+(-v)$ is denoted by $u-v$. Then, we have the following properties:*

$$\lambda(u-v)=\lambda u-\lambda v \ \ and \ \ (\lambda-\mu)u=\lambda u-\mu u.$$

3.2.3 الفضاءات الشعاعية الجزئية Partial vector spaces

لتكن الثلاثية $(E,\Delta,\star)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$.

Let the triple $(E,\Delta,\star)$ be a vector space on the commutative field $\mathbb{K}$.

8.2.3 : Definition - تعريف

نقول عن الجزء غير الخال F من E إنه فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق الشرطان:

We say that the non-empty part F of E is a partial vector space of E if the following conditions are satisfied:

1) (F,Δ) زمرة جزئية من الزمرة التبديلية (E,Δ).

(F,Δ) is a subgroup of the commutative group (E,Δ).

2) $\lambda\cdot x\in F \quad \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in F:$.

أو يمكننا استعمال التعريف التالي:

Or we can use the following definition:

9.2.3 : Definition - تعريف

لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.

Let E be a vector space over the field $\mathbb{K}$ and F a non-empty subset of E.

نقول عن F أنها فضاء شعاعي جزئي من E إذا تحقق ما يلي:

We say that F is a subspace of E if the following conditions hold:

1) $0_E\in F$ 　　　　 $0_E\in F$

2) من أجل كل $u,v\in F$ لدينا $u+v\in F$

For every $u, v \in F$ we have $u + v \in F$

3) من أجل كل $\lambda \in \mathbb{K}$ و كلاّ $u \in F$ لدينا $\lambda \cdot u \in F$

For every $\lambda \in \mathbb{K}$ and every $u \in F$ we have $\lambda \cdot u \in F$.

10.2.3 : Example - مثال

1) من أجل كل فضاء شعاعي E، فإن $\{0_E\}$ هو دوما فضاء شعاعي جزئي من E.

For every vector space E, $\{0_E\}$ is always a vector subspace of E.

2) مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية التي درجاتها أقل أو تساوي n، $\mathscr{P}_n[x]$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ ،

The set of polynomials with real coefficients whose degrees are less than or equal to n, $\mathscr{P}_n[x]$ is a vector space on $\mathbb{K}$,

ولدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ فإن: $\mathscr{P}_m[x]$ هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathscr{P}_n[x]$ حيث $n < m$.

and we have $\forall n \in \mathbb{N}^*$ then: $\mathscr{P}_m[x]$ is a vector subspace of $\mathscr{P}_n[x]$ where $n < m$.

1.2.3 : Corollary - نتيجة

لتكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و F مجموعة جزئية غير خالية من E.

Let E be a vector space on the field $\mathbb{K}$ and F a non-empty subset of E.

لكي يكون F فضاء شعاعي جزئي من E يكفي أن يتحقق الشرط التالي:

To have F be a partial subspace of E, it is sufficient for the the following conditions hold:

$$\boxed{\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda x + \mu y \in F.}$$

1.2.3 : Remark - ملاحظة

- كل فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على حقل تبديلي، هو أيضا فضاء شعاعي على نفس الحقل.

  Every sub-vector space of a vector space on a commutative field is also a vector space on the same field.

- كل فضاء شعاعي على حقل تبديلي ما، هو أيضا فضاء شعاعي جزئي من نفسه على نفس الحقل.

  Every vector space on some commutative field is also a sub-vector space of itself on the *same field.*

4.2.3 Linear combination المزج الخطية

10.2.3 : Definition - تعريف

نفترض أن $n \geq 1$ عدد صحيح، ولتكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ، n شعاع من E. كل شعاع من الشكل:

Let $n \geq 1$ be an integer, and let $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n be a vector from E. Each ray of the form:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ سلميات من الحقل $\mathbb{K}$) يسمى مزج خطي للأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

(where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are ladders of the field $\mathbb{K}$) It is called linear mixing of rays $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ نسمى معاملات المزج الخطي.

The scales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are called linear mixing coefficients.

2.2.3 : Remark - ملاحظة

إذا كان $n = 1$، ومنه $u = \lambda_1 v_1$ و نقول أن u على علاقة خطية مع v_1.

If $n = 1$, then $u = \lambda_1 v_1$, and we say that u is in a linear relationship with v_1.

11.2.3 : Example - مثال

1) في الفضاء $\mathbb{R}^3$، الشعاع $(3,3,1)$ هي مزج خطي للشعاعين $(1,1,0)$ و $(1,1,1)$ لأن:

In the space $\mathbb{R}^3$, the ray $(3,3,1)$ is a linear combination of the two rays $(1,1,0)$ and $(1,1,1)$ because:

$$(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1).$$

2) في الفضاء $\mathbb{R}^2$، الشعاع $u = (2,1)$ ليس مرتبط خطيا مع الشعاع $v_1 = (1,1)$ لأنه لا يوجد λ حقيقي حتى يكون $u = \lambda v_1$ الذي يكافئ $(2,1) = (\lambda, \lambda)$.

In the space $\mathbb{R}^2$, the vector $u = (2,1)$ is not linearly related to the vector $v_1 = (1,1)$ because there is no real λ until $u =$ lambdav_1 which is equivalent to $(2,1) = (\lambda, \lambda)$.

3) ليكن $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، وليكن f_0، f_1، f_2 و f_3 دوال معرفة بمايلي:

Let $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be the space of real functions, and let f_0, f_1, f_2 and f_3 be functions defined by:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3.$$

ومنه الدالة f المعرفة بـ

then the function f defined by

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

هي مزج خطي للدوال f_0, f_1, f_2, f_3 لأن

it is a linear combination of the functions f_0, f_1, f_2, f_3 because

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

4) في فضاء المصفوفات $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ لتكن المصفوفة

In the matrix space $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ let the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

نستطيع كتابة A على شكل مزج خطي لمصفوفات تحتوي على أصفار في كل مكوناتها إلا واحدة فقط مثلا:

We can express matrix A as a linear combination of matrices that contain zeros in all their components except one, for example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2.3 الإرتباط والإستقلال الخطي Linear correlation and independence

تعريف - Definition : 11.2.3

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$

أنها مستقلة خطيا أو إنها جملة حرة، إذا كان من أجل كل عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i\leq n} \in \mathbb{K}$ لدينا:

Let $n \in \mathbb{N}^*$ be a natural number. We say that a family $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ of elements in the vector space E over the field $\mathbb{K}$ is linearly independent or a free family if, for every family of scalars $\{\lambda_i\}_{i\leq n} \in \mathbb{K}$, the following condition holds:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$$

حيث تكون جميع معاملاتها معدومة، أي:

where all its coefficients are zero, i.e.:

$$\lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}, \quad \lambda_2 = 0_{\mathbb{K}}, \quad \cdots \quad \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

0_E و $0_{\mathbb{K}}$ يمثلان صفر الفضاء الشعاعي E وصفر الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ على الترتيب.

0_E and $0_{\mathbb{K}}$ represent the zero of the vector space E and the zero of the commutative field $\mathbb{K}$, respectively.

12.2.3 : Example - مثال

لنعتبر في الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^3$ الأشعة

Let us consider in real vector space $\mathbb{R}^3$ the rays

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ومنه، الشعاع b هو مزج خطي للأشعة $\{a_1, a_2, a_3\}$ و لدينا:

Hence, the ray b is a linear mixture of the rays $\{a_1, a_2, a_3\}$ and we have:

$$\begin{aligned} b &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 - a_2 + a_3. \end{aligned}$$

3.2.3 : Remark - ملاحظة

- نقول عن أية عائلة من عناصر الفضاء الشعاعي، إن لم تكن مستقلة خطيا أنها مرتبطة خطيا.

  We say of any family of vector space elements, if they are not linearly independent, *that they are linearly dependent.*

- المجموعة الخالية مستقلة خطيا في أي فضاء شعاعي.

The empty set is linearly independent in any vector space.

13.2.3 : Example - مثال

كثيرات الحدود

The polynomials

$$P_1(X) = 1 - X, P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2 \quad and \quad P_3(X) = 1 + 3X - X^2.$$

تشكل جملة خطية مترابطة في فضاء كثيرات الحدود$\mathscr{P}_n[X]$ لأن:

form a linearly dependent set in the polynomial space $\mathscr{P}_n[X]$ because:

إذا فحصنا معاملات كثيرات الحدود هذه، فسنلاحظ أن المعادلة

If we examine the coefficients of these polynomials, we can observe that the equation

$$aP_1(X) + bP_2(X) + cP_3(X) = 0.$$

لها حل غير معدوم مما يعني وجود ثوابت a، b، و c، لا تساوي جميعها صفرا، مما يجعل هذه المعادلة تساوي صفرا.

has a non-trivial solution, which means there exist constants a, b, and c, not all equal to zero, that make this equation equal to zero.

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

لذلك، فإن كثيرات الحدود مرتبطة خطياً في فضاء كثيرات الحدود.

Therefore, the polynomials are linearly dependent in the polynomial space.

14.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ فضاء الدوال الحقيقية، ولتكن الجملة $\{\cos, \sin\}$. لنبرهن أن هذه الجملة مستقلة خطيا: نفرض أن

Let $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ be the space of real functions, and let the statement be $\{\cos, \sin\}$. To prove that this set is linearly independent: We assume that

$$\lambda \cos + \mu \sin = 0$$

يكافئ أن

That equivalent to

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0.$$

من أجل $x = 0$ هذه المساوات تعطينا: $\lambda = 0$.

For $x = 0$ these equations give us: $\lambda = 0$.

ومن أجل $x = \frac{\pi}{2}$ تعطينا $\mu = 0$. أي أن الجملة $\{\cos, \sin\}$ مستقلة خطيا.

For $x = \frac{\pi}{2}$ it gives us $\mu = 0$. That is, the set $\{\cos, \sin\}$ is linearly independent.

من ناحية أخرى ، الجملة $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ مرتبطة خطيا لأنه لدينا العلاقة المثلثية التالية:

On the other hand, the set $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ is linearly related because we have the following trigonometric relationship:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 - 1 = 0.$$

هنا عوامل المزج الخطي كلها غير معدومة حيث لدينا:

Here, all the linear combination factors are non-zero because we have:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

2.2.3 : Corollary - نتيجة

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نقول عن عائلة $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ من عناصر الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ أنها مرتبطة خطيا إذا وجدت عائلة من السلميات $\{\lambda_i\}_{i \leq n} \in \mathbb{K}$ ليست كلها معدومة معا، تحقق:

Let $n \in \mathbb{N}^*$ we say about the family $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ of vector space elements E on The commutative field $\mathbb{K}$ is linearly dependent if there exists a family of scalers $\{\lambda_i\}_{i \leq n} \in \mathbb{K}$ that are not all null together, check:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E.$$

15.2.3 : Example - مثال

من المثال السابق لاحظ أن الجملة

From the previous example notice that the vectors

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مرتبطة خطيا

linearly dependent

$$a_1 - a_2 + a_3 - b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

أي

so

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1 : \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 b = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

ليست كلها معدومة معا.

Not all are zero together.

6.2.3 القاعدة أو الأساس The base or basis

القاعدة هي مفهوم أساسي في الجبر الخطي ولها تطبيقات وأهمية كبيرة. عندما يكون لديك قاعدة للفضاء الشعاعي، يمكنك تمثيل وفهم العناصر في هذا الفضاء بشكل أكثر فهما وسهولة، ويمكنك أيضا إجراء عمليات مختلفة مثل التحويلات الخطية وحساب المعاملات بسهولة باستخدام هذه القاعدة.

A basis is a fundamental concept in linear algebra and holds significant applications and importance. When you have a basis for a vector space, you can represent and understand the elements in that space more comprehensively and easily. You can also perform various operations, such as linear transformations and coefficient calculations, with ease using this basis.

تعريف - Definition : 12.2.3

لتكن $v_1, \cdots, v_n$ أشعة من الفضاء الشعاعي E، نقول عن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ أنها جملة مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كان كل شعاع من E يكتب على شكل مزج خطي في الأشعة $v_1, \cdots, v_n$. ونكتب

Let $v_1, \cdots, v_n$ be rays from the vector space E, we say of the set $\{v_1, \cdots, v_n\}$ that it is a generating set for the vector space E if every ray of E can be expressed as a linear *combination of the rays $v_1, \cdots, v_n$. We write:*

$$\forall v \in E, \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}: \quad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

و نقول أيضا أن الجملة $\{v_1, \cdots, v_n\}$ مولدة للفضاء E. أي مرتبطة بمفهوم الفضاء الشعاعي الجزئي المولد إذا وفقط إذا كان :

We also say that the set $\{v_1, \cdots, v_n\}$ generates the space E. This is also associated with the concept of the span generator if and only if:

$$E = Vect(v_1, \cdots, v_n).$$

16.2.3 : Example - مثال

Take, for example, the following rays **لتكن على سبيل المثال الأشعة التالية**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad and \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad of \quad E = \mathbb{R}^3.$$

الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مولدة لـ $\mathbb{R}^3$ لأن كل شعاع $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ من $\mathbb{R}^3$ يكتب

The set $\{v_1, v_2, v_3\}$ is generating $\mathbb{R}^3$ because each ray $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ from $\mathbb{R}^3$ writes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Here the factors are **هنا العوامل هي**

$$\lambda_1 = x, \lambda_2 = y, \lambda_3 = z.$$

17.2.3 : Example - مثال

Let the following rays be **لتكن الأشعة التالية**

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad of \quad E = \mathbb{R}^3.$$

الأشعة $\{v_1, v_2\}$ لا تشكل جملة مولدة لـ $\mathbb{R}^3$. مثلا الشعاع $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ لاينتمي للفضاء الشعاعي $Vect(v_1, v_2)$.

The rays $\{v_1, v_2\}$ do not form a generative set for $\mathbb{R}^3$. For example, the vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ does *not belong to the vector space $Vect(v_1, v_2)$.*

فإذا كان فعلا فسوف نجد $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ حيث $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. والذي يكتب أيضا:

If it is true, we will find $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ where $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Who also writes:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

يعطينا الجملة الخطية التالية:

it gives us the following linear equations:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

التي ليس لها حل.

which has no solution.

18.2.3 : Example - مثال

ليكن $\mathscr{P}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $n \leq$ الحقيقية ذات المعاملات الحقيقية. ومنه جملة كثيرات الحدود $\{1, X, X^2 \cdots, X^n\}$ تشكل جملة مولدة للفضاء $\mathscr{P}_n[X]$.

Let $\mathscr{P}_n[X]$ be the real vector space of polynomials of degree $\leq n$ with real coefficients. Then, the polynomial set $\{1, X, X^2 \cdots, X^n\}$ forms a generating set for the space $\mathscr{P}_n[X]$.

2.2.3 : Proposition - قضية

لتكن $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ جملة مولدة لـ E. ومنه $\mathscr{F}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_q\}$ هي أيضا جملة مولدة لـ E إذا وفقط إذا كتب كل شعاع من $\mathscr{F}'$ على شكل مزج خطي في الجملة $\mathscr{F}$.

Let $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ be a generative set of E. Hence $\mathscr{F}' = \{v'_1, v'_2, \cdots, v'_q\}$ is also a generative set of E if and only if every vector of $\mathscr{F}'$ is written as a linear mixture in the set $\mathscr{F}$.

13.2.3 : Definition - تعريف

ليكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$. نقول أن الجملة $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ من E تشكل أساس للفضاء E إذا كانت:

Let E be a vector space on $\mathbb{K}$. We say that the set $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ of E forms a basis for the space E if:

1) $\mathcal{B}$ جملة مولدة لـ E. — *$\mathcal{B}$ is a generating set for E.*

2) $\mathcal{B}$ جملة مستقلة خطيا. — *$\mathcal{B}$ is a linear independent set.*

1.2.3 : Theorem - نظرية

لتكن $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ أساس للفضاء الشعاعي E.

Let $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ be a basis of the vector space E.

كل شعاع $v \in E$ يكتب على شكل كتابة وحيدة كمزج خطي في عناصر المجموعة $\mathcal{B}$. أي يوجد سلميات $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ وحيدة حيث:

Each vector $v \in E$ is written as a single linear combination in the elements of the set $\mathcal{B}$.

That is, there are single scalers $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ where:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

4.2.3 : Remark - ملاحظة

1) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ نسمى إحداثيات الشعاع v في الأساس $\mathcal{B}$.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ are called the coordinates of v in the basis $\mathcal{B}$.

2) التطبيق من الشكل — *The application of form*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

هو تقابل من الفضاء الشعاعي $\mathbb{K}^n$ نحو الفضاء الشعاعي E.

It is a bijection from the vector space $\mathbb{K}^n$ to the vector space E.

7.2.3 بعد فضاء شعاعي Dimension of a vector space

البُعد في الفضاء الأشعة يُشير إلى عدد الشعاعات (أو الأبعاد) الفرعية التي يتكون منها هذا الفضاء. يمكن أن يكون البُعد مفهوما مهما في مجموعة متنوعة من السياقات، بما في ذلك الرياضيات والفيزياء.

The dimension in vector space refers to the number of subspaces (or dimensions) that compose this space. Dimension can be an important concept in various contexts, including mathematics and physics.

في السياق الرياضي، يمكن تمثيل الفضاء الشعاعي باستخدام مجموعة من الأسس (أو الأشعة) التي تتيح تمثيل أي نقطة في هذا الفضاء. البُعد في هذا السياق يُشير إلى عدد الأشعة الأساسية اللازمة لتمثيل أي نقطة في الفضاء بشكل فريد. على سبيل المثال، الفضاء الثنائي $(2D)$ يتطلب شعاعين أساسيين لتمثيل نقطة، بينما الفضاء الثلاثي $(3D)$ يتطلب ثلاث أشعة أساسية.

In a mathematical context, a vector space can be represented using a set of basis vectors (or rays) that allows unique representation of any point in that space. Dimension in this context indicates the number of fundamental rays required to uniquely represent any point in the space. For example, a two-dimensional space (2D) requires two basis rays to represent a point, while a three-dimensional space (3D) requires three basis rays.

في الفيزياء وعلوم الهندسة، البُعد في الفضاء الشعاعي يُشير إلى عدد الإتجاهات المختلفة التي يمكن أن يتحرك فيها شيء معين. على سبيل المثال، الكرة في الفضاء الثلاثي الأبعاد تتحرك في ثلاث إتجاهات مختلفة، وبالتالي، لديها ثلاثة أبعاد.

In physics and engineering, dimension in vector space refers to the number of different directions in which a particular object can move. For example, a ball in three-dimensional space can move in three different directions, and thus, it has three dimensions.

البُعد في الفضاء الشعاعي يكون أساسيا لتحليل وفهم الخصائص والسلوك في مجموعة متنوعة من السياقات الرياضية والعلمية.

The dimension in vector space is fundamental for analyzing and understanding properties and behaviors in various mathematical and scientific contexts.

14.2.3 : Definition - تعريف

إذا كان للفضاء الشعاعي E أساس $\mathcal{B}$ ذو عدد منته n من العناصر فإن الفضاء الشعاعي E ذو بعد منته ونكتب

If the vector space E has a basis $\mathcal{B}$ with a finite number of elements n, then the vector space

E has a finite dimension, and we write:

$$\dim(E) = Card(\mathcal{B}) = n.$$

5.2.3 : Remark - ملاحظة

الفضاء المعدوم $\{0\}$ ذو بعد معدوم أي $\dim(\{0\}) = 0$.

The zero space $\{0\}$ has a zero dimension, i.e. $\dim(\{0\}) = 0$.

19.2.3 : Example - مثال

1) الأساس القانوني للفضاء $\mathbb{R}^2$ هو:

The canonical basis for the space $\mathbb{R}^2$ is:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ومنه بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو 2.

Hence the dimension of space $\mathbb{R}^2$ is 2.

2) الأشعة

The vectors

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

تشكل أيضا أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ و أي أساس لـ $\mathbb{R}^2$ آخر فإنه يحتوي على نفس عدد العناصر.

It also forms the basis of the space $\mathbb{R}^2$, and any other basis of the space $\mathbb{R}^2$ contains the same number of elements.

3) بصفة عامة الفضاء $\mathbb{K}^n$ ذو بعد n لأن كل أساس له $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ يحوي n عنصر.

In general, the space $\mathbb{K}^n$ has n dimensions because each basis $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ contains n elements.

4) $(\dim \mathscr{P}_n[X] = n+1)$ لأن أساس الفضاء $\mathscr{P}_n[X]$ هو $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ الذي يحوي $n+1$ عنصر.

$(\dim \mathscr{P}_n[X] = n+1)$ *because the basis of the space $\mathscr{P}_n[X]$ is $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ which contains $n+1$ elements.*

2.2.3 : Theorem - نظرية

في فضاء شعاعي ذو البعد المنته n لدينا:

In a vector space with finite dimension n, we have:

- كل جملة مستقلة خطيا بها n عنصر كحد أقصى،

Each linearly independent set has a maximum of n elements,

- كل جملة مستقلة خطيا مكونة من n عنصر فهي أساس،

Every linearly independent set consisting of n elements is a basis,

- كل جملة مولدة فهي مكونة من n عنصر على الأقل،

Every generative set is composed of at least n elements,

- كل جملة مولدة مكونة من n عنصر فهي أساس.

Every generated set consisting of n elements is a basis.

15.2.3 : Definition - تعريف

نسمي رتبة جملة أشعة، بعد الفضاء الشعاعي الذي تولده.

We call the range of a set of rays, the dimension of the vector space they generate.

6.2.3 : Remark - ملاحظة

الملاحظات التالية هي نتائج سهلة للنظرية السابقة:

The following observations are easy consequences of the previous theorem:

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع على الأكثر n.

The range of a set consisting of n rays, at most is n.

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطيا.

The range of a ray system consisting of n rays is n if and only if this system is linearly independent.

- رتبة جملة أشعة مكونة من n شعاع هي n إذا وفقط إذا كانت هذه الجملة تشكل أساسا للفضاء الشعاعي الذي تولده.

The range of a ray system consisting of n rays is n if and only if this system forms the *basis of the vector space it generates.*

8.2.3 المجموع المباشر Direct sum

المجموع المباشر هو مصطلح يستخدم في الرياضيات والجبر الخطي للإشارة إلى العملية التي تجمع بين فضائين من نوعين مختلفين دون تداخل بينهما. إذا كان لديك فضاءين منتهيين (على سبيل المثال، فضاءين جزئيين)، يمكنك دمجهما معا لإنشاء مساحة أكبر تسمى المجموع المباشر.

The direct sum is a term used in mathematics and linear algebra to refer to the operation that combines two distinct types of spaces without any overlap between them. If you have two finite spaces (for example, two subspaces), you can merge them together to create a larger space known as the direct sum.

استخدام المجموع المباشر يكون مفيدا في الجبر الخطي والرياضيات حيث تكون هناك حاجة لدمج مساحات نوعية مختلفة أو لتوسيع الأبعاد.

The use of the direct sum is valuable in linear algebra and mathematics when there is a need to combine different types of spaces or to expand dimensions.

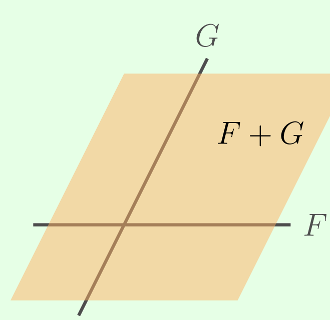
16.2.3 : Definition - تعريف

Let F and G be two sub-vector spaces of E. ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E.

مجموعة جميع العناصر $u+v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G نسمى مجموع الفضائين الشعاعيين الجزئيين F و G. ونرمز له بالرمز $F+G$. ومنه نكتب:

The set of all elements $u+v$ where u is an element of F and v is an element of G is called the sum of the vector subspaces F and G. We denote it with $F+G$. Then we write:

$$F+G=\{u+v \mid u \in F, v \in G\}.$$



3.2.3 : Proposition - قضية

ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. فإن:

Let F and G be two sub-vector spaces of E. Then:

1) $F+G$ فضاء شعاعي جزئي من E.

$F+G$ is a sub-vector space of E.

2) $F+G$ هو أقل فضاء شعاعي جزئي يحوي في نفس الوقت F و G.

$F+G$ is the minimal sub-vector space that simultaneously contains F and G.

17.2.3 : Definition - تعريف

ليكن F و G فضائين شعاعيين جزئيين من E. نقول أن F و G في جمع مباشر في E نرمز له بالرمز $F \oplus G = E$ إذا كان:

Let F and G be two sub-vector spaces of E. We say that F and G are in direct sum in E, which we denote by $F \oplus G = E$ if:

- $F \cap G = \{0_E\}$
- $F+G=E$.

إذا كان F و G في جمع مباشر نقول أن F و G فضاءان شعاعيان جزئيان متكاملان في E.

If F and G are in direct sum, we say that F and G are two complementary sub-vector spaces in E.

4.2.3 : Proposition - قضية

نقول أن F و G متكاملان في E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب بطريقة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G.

We say that F and G are complementary in E if and only if each element of E is written in as a unique way for an element of F and an element of G.

7.2.3 : Remark - ملاحظة

1) نقول أن w من E يكتب على شكل كتابة وحيدة لعنصر من F وعنصر من G يعني أن $w = u + v$ حيث $u \in F$ و $v \in G$ و كتابة أخرى من الشكل $w = u' + v'$ حيث $u' \in F$، $v' \in G$ فإنه حتما $u = u'$ و $v = v'$.

We say that w of E is written as a single writing of an element of F and an element of G, which means that $w = u + v$ where $u \in F$, $v \in G$, and another writing From the form $w = u' + v'$ where $u' \in F$, $v' \in G$ it is inevitable that $u = u'$ and $v = v'$.

2) إذا كان لدينا $F \oplus G = E$. فإننا نقول أن الفضاء الشعاعي الجزئي F مكمل للفضاء الشعاعي الجزئي G و العكس.

If we have $F \oplus G = E$. We say that the sub-vector space F is complementary to the sub-vector space G and vice versa.

3) وجود الفضاءات الشعاعية الجزئية المتكاملة يكون فقط في فضاءات شعاعية ذات أبعاد منتهية.

The presence of complimentary sup-vector spaces occurs only in finite-dimensional vector spaces.

4) إذا كان لدينا $F \oplus G = E$. فإن

e have $F \oplus G = E$. Then

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

20.2.3 : Example - مثال

1) ليكن

Let

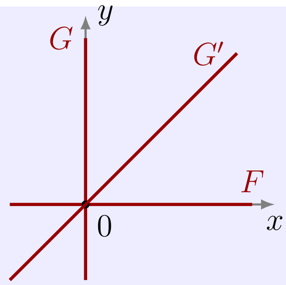
$$F = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad and \quad G = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

أثبت أن

Prove that

$$F \oplus G = \mathbb{R}^2.$$

لدينا $F \cap G = \{(0,0)\}$ وبما أن $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ فإن $F + G = \mathbb{R}^2$. أو يمكن أن نرى بسهولة أن الكتابة التالية $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ وحيدة.



We have $F \cap G = \{(0,0)\}$ and since $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ then $F + G = \mathbb{R}^2$. Or we can easily see that the following writing $(x,y) = (x,0) + (0,y)$ is unique.

2) نأخذ F ونضع $G' = \big\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$. يمكننا إثبات أيضا أن :

We take F and $G' = \big\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$. We can also prove that:

$$F \oplus G' = \mathbb{R}^2$$

A) نثبت أن — *we prove that*

$$F \cap G' = \{(0,0)\}.$$

إذا كان $(x,y) \in F \cap G'$ ومنه من جهة $(x,y) \in F$ أي $y = 0$ و أيضا $(x,y) \in G'$ فإن $x = y$. وبالتالي $(x,y) = (0,0)$.

If $(x,y) \in F \cap G'$ then, from one side $(x,y) \in F$ i.e. $y = 0$ and also $(x,y) \in G'$ then $x = y$. Therefore $(x,y) = (0,0)$.

B) نثبت أن — *we prove that*

$$F + G' = \mathbb{R}^2.$$

لتكن $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. نبحث عن $v \in F$ و $w \in G'$ حيث $u = v + w$. بما أن $v = (x_1, y_1) \in F$ فإن $y_1 = 0$ و بما أن $w = (x_2, y_2) \in G'$ فإن $x_2 = y_2$. إذا نجد x_1 و x_2 حيث

Let $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. We look for $v \in F$ and $w \in G'$ where $u = v + w$. Since $v = (x_1, y_1) \in F$ then $y_1 = 0$ and since $w = (x_2, y_2) \in G'$ then $x_2 = y_2$. So we find x_1 and x_2 where

$$(x,y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2).$$

ومنه $(x,y)=(x_1+x_2,x_2)$. وبالتالي $x=x_1+x_2$ و $y=x_2$ حيث $x_1=x-y$ و $x_2=y$.
نجد

Then $(x,y)=(x_1+x_2,x_2)$. Hence $x=x_1+x_2$ and $y=x_2$ where $x_1=x-y$ and $x_2=y$. We find

$$(x,y)=(x-y,0)+(y,y),$$

مما يثبت أن أي عنصر من عناصر $\mathbb{R}^2$ هو مجموع عنصر من F وعنصر من G'.

Which proves that any element of $\mathbb{R}^2$ is the sum of an element of F and an element of G'.

3.3 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 3*

Exercise N°– 1 – تمرين رقم

1) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:x\bigstar y=xy+\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$$

أثبت أن $\bigstar$ تبديلي وليس تجميعي وأن 1 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative, not additive, and that 1 is the neutral element.

2) نزود المجموعة $\mathbb{R}_+^*$ بقانون التركيب الداخلي $\bigstar$ المعرف كما يلي:

We provide the set $\mathbb{R}_+^*$ with the internal composition law $\bigstar$ defined as follows:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*:x\bigstar y=\sqrt{x^2+y^2}$$

A) أثبت أن $\bigstar$ تبديلي و تجميعي وأن 0 هو العنصر الحيادي.

Prove that $\bigstar$ is commutative and additive and that 0 is the neutral element.

B) أثبت أنه لايوجد في $\mathbb{R}_+^*$ أي عنصر نظير بالنسبة للعملية $\bigstar$.

Prove that there is no element in $\mathbb{R}_+^*$ that is an opposite with respect to the operation $\bigstar$.

الحـــل : Solution

1) نلاحظ أن

$$x\bigstar y = xy + (x^2-1)(y^2-1) = yx + (y^2-1)(x^2-1) = y\bigstar x$$

ومنه القانون ★ تبديلي

لإثبات أن القانون ليس تجميعيا، يكفي العثور على x و y و z بحيث:

$$x\bigstar(y\bigstar z) \neq (x\bigstar y)\bigstar z$$

كما سنرى أدناه أن 1 هو العنصر الحيادي، ومنه يجب أن لا نأخذ 1 في إختيار العناصر x و y و z. نأخذ على سبيل المثال: $x=0$ ، $y=2$ و $z=3$

$$\begin{aligned} x\bigstar(y\bigstar z) &= 0\bigstar(2\bigstar 3)\\ &= 0\bigstar(2\bigstar 3+(2^2-1)(3^2-1))\\ &= 0\bigstar(6+3\times 8)\\ &= 0\bigstar 30\\ &= 0\bigstar 30+(0^2-1)(30^2-1) = -899 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\bigstar y)\bigstar z &= (0\bigstar 2)\bigstar 3\\ &= (0\times 2+(0^2-1)(2^2-1))\bigstar 3\\ &= (-3)\bigstar 3\\ &= -3\times 3+((-3)^2-1)(3^2-1)\\ &= -9+82\\ &= 55 \end{aligned}$$

القانون ★ ليس تجميعيا.

$$1\bigstar x = 1\cdot x + (1^2-1)(x^2-1) = x$$

بالإضافة لذلك ، لأن القانون تبديلي فإن:

$$x\bigstar 1 = 1\bigstar x$$

لدينا $x\bigstar 1 = 1\bigstar x = x$، 1 هو العنصر الحيادي.

2) A) لدينا

$$x\bigstar y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y\bigstar x$$

القانون $\bigstar$ تبديلي.

$$(x\bigstar y)\bigstar z = \sqrt{x^2+y^2}\bigstar z = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بإعادة الحساب أعلاه عن طريق تغيير (x,y,z) بـــ (y,z,x) نجد :

$$(y\bigstar z)\bigstar x = \sqrt{y^2+z^2+x^2}$$

لأن $\bigstar$ تبديلي، ومنه : القانون $\bigstar$ تجميعي.

$$(y\bigstar z)\bigstar x = x\bigstar(y\bigstar z)(x\bigstar y)\bigstar z = x\bigstar(y\bigstar z)$$

كان بإمكاننا الحساب مباشرة $x\bigstar(y\bigstar z)$ لأن $\bigstar$ تبديلي فإن 0 هو العنصر الحيادي.

$$0\bigstar x = \sqrt{0^2+x^2} = |x| = x, \qquad \text{لأن} \quad x \geq 0$$

$$0\bigstar x = x\bigstar 0$$

$$0\bigstar x = x\bigstar 0 = x$$

B) لنفترض أن x يقبل نظير y

$$x\bigstar y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

في حين $x > 0$ و $y > 0$ ومنه $x\bigstar y = 0$ مستحيل من أجل كل $x > 0$ أي x ليس له نظير.

Exercise N°– 2 – تمرين رقم

لتكن $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ و $\bigstar$ القانون المعرف في G كما يلي:

Let $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ and $\bigstar$ be the law defined in G as follows:

$$(x, y) \bigstar (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1) أثبت أن $(G, \bigstar)$ زمرة ليست تبديلية.

Prove that $(G, \bigstar)$ is a non-commutative group.

2) أثبت أن $(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \bigstar)$ زمرة جزئية من $(G, \bigstar)$.

Prove that $(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \bigstar)$ is a sub-group of $(G, \bigstar)$.

Solution : الحــل

1 − A) إذا كان $x \neq 0$ و $x' \neq 0$ فإنه $xx' \neq 0$

$$(x, y) \bigstar (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \cdot \mathbb{R}.$$

القانون $\bigstar$ هو قانون تركيب داخلي.

$$\begin{aligned}
(x, y) \bigstar ((x', y') * (x'', y'')) &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') \\
&= (xx'x'', x(x'y'' + y') + y) \\
&= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
((x, y) \bigstar (x', y')) \bigstar (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\
&= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)
\end{aligned}$$

ومنه القانون $\bigstar$ تجميعي.

1 − B) لتكن (a, b) حيث من أجل كل $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$(a, b) \bigstar (x, y) = (x, y) = (x, y) \bigstar (a, b)$$

هذه المساوات مكافئة لـ:

$$(ax, ay + b) = (x, y) = (xa, xb + y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ ay + b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

ومنه $(1, 0)$ هو العنصر الحيادي.

C − 1) ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ نبحث عن (x',y') حيث

$$(x,y)\bigstar(x',y')=(1,0)=(x',y')\bigstar(x,y)$$

هذه المساواة مكافئة لـ:

$$(xx',xy'+y)=(1,0)=(x'x,x'y+y')\Leftrightarrow\begin{cases}xx'=1\\x'y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{x}\\y'=\frac{-y}{x}\end{cases}$$

العنصر النظير لـ (x,y) هو $(\frac{1}{x},\frac{-y}{x})$. ومنه $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ تشكل زمرة.

D − 1) بما أن $(1,2)\bigstar(2,0)=(2,2)$ و $(2,0)\bigstar(1,2)=(2,4)$ فمن الواضح جدا أن الزمرة ليست تبديلية.

2) العنصر الحيادي لـ $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$ هو $(1,0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
ليكن $(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ و $(x',y')\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه

$$(x,y)\bigstar\left(\frac{1}{x'},\frac{-y'}{x'}\right)=\left(\frac{x}{x'},x\left(\frac{-y'}{x'}\right)+y\right)=\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)$$

بما أن $x>0$ فإن $\left(\frac{x}{x'},\frac{-y'x+x'y}{x'}\right)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. ومنه $(\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\bigstar)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\bigstar)$.

Exercise N°− 3 − تمرين رقم

نزود المجموعة $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالقانونين المعرفين كما يلي:

We provide the set $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ with the two laws defined as follows:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

and و

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

1) أثبت أن $(A,+)$ زمرة تبديلية.

Prove that $(A,+)$ is a commutative group.

2) أثبت أن — *Prove that*

A) القانون $*$ تبديلي. — *The law $*$ is commutative.*

B) القانون $*$ تجميعي. — *The law $*$ is associative.*

$(C$ اوجد العنصر الحيادي بالنسبة للقانون $*$.

Find the neutral element with respect to the law $*$.

$(D$ أثبت أن $(A,+,*)$ تشكل حلقة تبديلية.

Prove that $(A,+,*)$ *forms a commutative ring.*

Solution : الحـــل

$(1$

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\in A$$

ومنه القانون داخلي.

$$\begin{aligned}(x,y)+[(x',y')+(x'',y'')] &= (x,y)+(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x+(x'+x''),y+(y'+y''))\\ &= ((x+x')+x'',(y+y')+y'')\\ &= [(x,y)+(x',y')]+(x'',y'')\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تجميعي.

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)\\ &= (x',y')+(x,y)\end{aligned}$$

ومنه القانون $+$ تبديلي.

ليكن (a,b) حيث $(x,y)+(a,b)=(x,y)$، من الواضح أن $(a,b)=(0,0)$ هو العنصر الوحيد الحيادي .

ليكن (x',y') حيث

$$(x,y)+(x',y')=(0,0)$$

هذا يكافئ

$$(x+x',y+y')=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$$

ومنه العنصر النظير (x,y) هو $(-x,-y)$. نستنتج أن $(A,+)$ زمرة تبديلية.

$(A-2$

$$(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+x'y)=(x'x,x'y+xy')=(x',y')*(x,y)$$

ومنه $*$ تبديلي.

$(B-2$

$$\begin{aligned}[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') &= (xx',xy'+x'y)*(x'',y'')\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''(xy'+x'y))\\ &= (xx'x'',xx'y''+x''xy'+x''x'y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] &= (x,y)*(x'x'',x'y''+x''y')\\ &= (xx'x'',x(x'y''+x''y')+x'x''y)\\ &= (xx'x'',xx'y''+xx''y'+x'x''y)\end{aligned}$$

ومنه

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$$

القانون $*$ تجميعي.

$(C-2$ **ليكن** (e,f) **حيث من أجل كل** $(x,y)\in A$،

$$(x,y)*(e,f) = (x,y)$$

e **و** f **تحقق :**

$$\begin{cases} xe = x \\ xf+ye = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=1 \\ f=0 \end{cases}$$

$(1,0)\in A$ **العنصر الحيادي لـ** A **بالنسبة للقانون** $*$.

$(D-2$ **توزيعية الجداء على الجمع**

$$\begin{aligned}(x,y)*[(x',y')+(x''+y'')] &= (x,y)*(x'+x'',y'+y'')\\ &= (x(x'+x''),x(y'+y'')+(x'+x'')y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+xy''+x'y+x''y)\\ &= (xx'+xx'',xy'+x'y+xy''+x''y)\\ &= (xx',xy'+x'y)+(xx'',xy''+x''y)\\ &= (x,y)*(x',y')+(x,y)*(x'',y'')\end{aligned}$$

في الأخير $(A,+,*)$ **حلقة تبدلية.**

تمرين رقم – 4 –Exercise N°

أوجد معادلات الفضاءات الشعاعية التي تم إنشاؤها بواسطة الأشعة التالية:

Find the equations of the victor spaces created by the following rays:

- $u_1 = (1, 2, 3)$
- $u_1 = (1, 2, 3)$ *and* $u_2 = (-1, 0, 1)$
- $u_1 = (1, 2, 0)$ ، $u_2 = (2, 1, 0)$ *and* $u_3 = (1, 0, 1)$

الحـــل : Solution

نضع F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع u_1. ومنه

$$(x, y, z) \in F \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= a \\ y &= 2a \\ z &= 3a \end{cases} \iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} a &= x \\ y - 2x &= 0 \\ z - 3x &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 2x &= 0 \\ z - 3x &= 0 \end{cases}$$

لقد وجدنا بالفعل معادلات لـ F. نضع G الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1 و u_2. ومنه:

$$(x, y, z) \in G \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x &= a - b \\ y &= 2a \\ z &= 3a + b \end{cases}$$

$$\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a &= y/2 \\ b &= z - 3y/2 \\ 0 &= x - 2y + z \end{cases}$$

$$\iff x - 2y + z = 0.$$

هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة G. نضع H الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة u_1، u_2 و u_3. ومنه :

$$(x, y, z) \in H \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x &= a + 2b + c \\ y &= 2a + b \\ z &= c \end{cases}$$

$$\iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} a+2b+c &= x\\ -3b-2c &= y-2x\\ c &= z\end{cases}$$

الجملة تقبل حلا مهما كانت قيم x، y و z. و بالتالي $H=\mathbb{R}^3$.

Exercise N°− 5 − تمرين رقم

أوجد الأشعة المولدة للفضاءات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^3$:

Find the generated rays of the following subspaces of $\mathbb{R}^3$*:*

- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+2y-z=0\}$
- $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x-y+z=0 \quad and \quad 2x-y-z=0\}$

Solution : الحــل

- لدينا

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff x=-2y+z \iff \begin{cases} x=-2y+z\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(-2y+z,y,z), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R},\\ &= y(-2,1,0)+z(1,0,1), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

نضع $u_1=(-2,1,0)$ و $u_2=(1,0,1)$ و منه نجد $F=vect(u_1,u_2)$.

- لدينا

$$(x,y,z)\in G \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ 2x-y-z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= 0\\ y-3z &= 0\end{cases}$$
$$\iff (x,y,z)=z\,(2,3,1)$$

و منه نجد $G=vect(u)$ حيث $u=(2,3,1)$

Exercise N°− 6 − تمرين رقم

لتكن في $\mathbb{R}^4$ الأشعة

Let be in $\mathbb{R}^4$ *the vectors*

$$v_1 = (1,2,3,4) \quad and \quad v_2 = (1,-2,3,-4).$$

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,y,1) \in Vect\{v_1, v_2\}$ ؟

Can we find x *and* y *where* $(x,1,y,1) \in Vect\{v_1, v_2\}$*?*

- هل نستطيع إيجاد x و y حيث $(x,1,1,y) \in Vect\{v_1, v_2\}$ ؟

Can we find x *and* y *where* $(x,1,1,y) \in Vect\{v_1, v_2\}$*?*

Solution : الحـــل

- لنا:

$$\begin{aligned}
& (x,1,y,1) \in Vect\{v_1, v_2\} \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4) + \mu(1,-2,3,-4) \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu) \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu) \\
\Longrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad 1 = 2(\lambda-\mu) \quad \text{و} \quad 1 = 4(\lambda-\mu) \\
\Longrightarrow & \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

وهو مستحيل (أيا كان x, y). لذلك لا يمكننا العثور على مثل x, y.

- بنفس المنطق :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y) \in Vect\{v_1,v_2\}\\
iff\ &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu, 2\lambda-2\mu, 3\lambda+3\mu, 4\lambda-4\mu)\\
\Longleftrightarrow &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad \begin{cases} x &= \lambda+\mu\\ 1 &= 2\lambda-2\mu\\ 1 &= 3\lambda+3\mu\\ y &= 4\lambda-4\mu\end{cases}\\
\Longleftrightarrow &\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12}\\ \mu &= -\frac{1}{12}\\ x &= \frac{1}{3}\\ y &= 2.\end{cases}
\end{aligned}$$

لذا فإن الشعاع الوحيد $(x,1,1,y)$ الذي يناسب $(\frac{1}{3},1,1,2)$.

الفصل الرابع

التطبيقات الخطية *Linear applications*

فهرس الفصل

4.1 التطبيقات الخطية *Linear applications*

التطبيقات الخطية تمثل مفهوما أساسيا في الرياضيات والفيزياء وعلوم الحاسوب والهندسة. تعني التطبيقات الخطية استخدام الخواص الرياضية للتطبيقات والدوال الخطية.

1.1.4 تعاريف Definitions

لقد واجهنا سابقا مفهوم التطبيق الخطي في التطبيق $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ سوف نعمم هذه الفكرة على جميع الفضاءات الشعاعية.

We have previously encountered the concept of a linear application in the application $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ We will generalize this idea to all vector spaces.

1.1.4 : Definition - تعريف

ليكن E و F فضائين شعاعيين على الحقل $\mathbb{K}$. نقول أن التطبيق f من E نحو F هو تطبيق خطي إذا كان يحقق الشرطين التاليين:

Let E and F be two vector spaces over the field $\mathbb{K}$. We say that the mapping f from E to F is a linear application if it satisfies the following two conditions:

1) **من أجل كل $u, v \in E$ لدينا**

For all $u, v \in E$ we have

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

2) **من أجل كل $u \in E$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ لدينا**

For all $u \in E$ and $\lambda \in \mathbb{K}$ we have

$$f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u).$$

1.1.4 : Example - مثال

التطبيق f المعرف

Application f defined as

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

هو تطبيق خطي. يمكن اثبات ذلك، لدينا $u=(x,y,z)$ و $v=(x',y',z')$ عنصرين من $\mathbb{R}^3$ و λ عدد حقيقي حيث:

It is a linear application. It can be proven that we have $u=(x,y,z)$ and $v=(x',y',z')$ two *elements of* $\mathbb{R}^3$ *and* λ *is a real numbers where:*

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x, y+3z)+(-2x', y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

and و

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y+3\lambda z) \\ &= \lambda \cdot (-2x, y+3z) \\ &= \lambda \cdot f(u) \end{aligned}$$

Properties خواص

1.1.4 : Proposition - قضيــة

لیكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ إذا كان f تطبيق خطي من E نحو F فإن:

Let E *and* F *be vector spaces on the same field* $\mathbb{K}$*. If* f *is a linear application from* E *to* F*, then:*

- $f(0_E)=0_F$
- $\forall u \in E: \ f(-u)=-f(u)$

لدينا الخواص التالية أيضا:

We also have the following properties:

2.1.4 : Proposition - قضيــة

لیكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F فإن:

Let E *and* F *be two vector spaces on the same field* $\mathbb{K}$ *and* f *the application from* E *to* F *then:*

التطبيق f خطي إذا وفقط إذا كان من أجل كل u و v من E ومن أجل كل سلمي λ و μ من $\mathbb{K}$، *The application f is linear if and only if for every u and v of E and for every scalars λ and μ of $\mathbb{K}$,*

$$\boxed{f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v).}$$

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$

2.1.4 : Definition - تعريف

- نقول أن التطبيق الخطي المعرف من E نحو F أنه أيضا إزومورفيزم أو أومومورفيزم للفضاء الشعاعي.

We say that the defined linear application of E to F is also an isomorphism or omomorphism of the vector space.

- مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E,F)$.

The set of linear applications of E in F is denoted by $\mathcal{L}(E,F)$.

- نسمي التطبيق الخطي المعرف من E نحو E بأندو مورفيزم (تشاكل ذاتي) مجموعة التطبيقات الخطية من E في F يرمز لها بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

We call the linear application defined from E to E an endomorphism. The set of linear applications defined from E to E is denoted by the symbol $\mathcal{L}(E)$.

2.1.4 رتبة تطبيق خطي Linear application range

لتكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد n على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و f أميومورفيزم من E نحو F، فإن رتبة التطبيق الخطي f هي بعد الصورة $Im(f)$. فإذا كان $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E، فإن $\beta=\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ تولد صورة هذا التطبيق، وتكون رتبة التطبيق هي $m\le n$ أكبر عدد للأشعة المستقلة خطيا من المجموعة β و نكتب:

Let E and F be vector spaces with finite dimension n defined on a commutative field $\mathbb{K}$ and f is an homeomorphism from E to F, then the range of the linear application f is the dimension of $Im(f)$. If $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ is a basis for the vector space E, then $\beta=\{f(v_1),f(v_2),...,f(v_n)\}$ generates the image of this application, and the range of the application is $m\le n$ is the largest number of linearly independent rays from the set β, and we write:

$$rang\,(f) = \dim\left(Im\,(f)\right) = m$$

وإذا كانت رتبة التطبيق مساوية لـ n، فإن بعد نواته صفر، ومن ثم فإن التطبيق الخطي تقابلي.

If the range of the application is equal to n, then its kernel dimension is zero, and therefore the linear application is bijective.

3.1.4 الصورة والنواة Image and kernel

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق من E نحو F. لتكن A مجموعة جزئية من E.

Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f an application from E to F. Let A be a subset of E.

جميع الصور بواسطة f لعناصر المجموعة A هي صورة مباشرة للمجموعة A نرمز لها بالرمز $f(A)$. وهي مجموعة جزئية من F. المعرفة:

All images by f of the elements of the set A are direct images of the set A which we denote by $f(A)$. It is a subset of F. defined as:

$$f(A) = \left\{f(x) \mid x \in A\right\}.$$

إذا كان $f : E \to F$ تطبيق خطي فإن $f(E)$ تسمى صورة التطبيق الخطي ونرمز لها بالرمز: $Im(f)$.

If $f : E \to F$ is a linear application, then $f(E)$ is called the linear application image and we denote it with: $Im(f)$.

3.1.4 : Proposition - قضيــة

1) **إذا كانت E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.**
If E' is a vector subspace of E then $f(E')$ is a vector subspace of F.

2) بصفة خاصة $Im(f)$ هي فضاء شعاعي جزئي من F.
In particular $Im(f)$ is a sub-vector space of F.

1.1.4 : Remark - ملاحظة

لدينا من خلال تعريف الصورة المباشرة $f(E)$: يكون f غامر إذا وفقط إذا $Im(f) = F$.
We have from definition of the direct image $f(E)$: the function f is surjective if and only if $Im(f) = F$.

3.1.4 : Definition - تعريف

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F.
Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f a linear application from E to F.
نرمز لنواة التطبيق f بالرمز $Ker(f)$ مجموعة العناصر من E التي صورها من 0_F :
We denote the application kernel of f by $Ker(f)$: the set of elements of E whose images are represented by 0_F:

$$\boxed{Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

بمعنى آخر ، النواة هي الصورة العكسية للشعاع الصفري لفضاء الوصول:
In other words, the kernel is the inverse image of the zero ray of the arrival space:

$$Ker(f) = f^{-1}\{0_F\}.$$

4.1.4 : Proposition - قضيــة

ليكن E و F فضائين شعاعيين على نفس الحقل $\mathbb{K}$ و f تطبيق خطي من E نحو F. فإن نواة التطبيق f هي فضاء شعاعي جزئي من E.
Let E and F be vector spaces on the same field $\mathbb{K}$ and f a linear application from E to F. Then the kernel of application f is a sub-vector space of E.

2.1.4 : Example - مثال

ليكن f التطبيق الخطي المعرف

Let f be the linear application defined by

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

- **حساب النواة** $Ker(f)$: ليكن

Calculating the kernel $Ker(f)$***:*** *Let*

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& 0 \\ y+3z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ومنه

then

$$Ker(f) = \big\{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\big\} = Vect\big\{(0,-3,1)\big\}.$$

بصيغة أخرى $Ker(f)$ تشكل مستقيم شعاع توجيهه $(0,-3,1)$.

In other words, $Ker(f)$ it forms a straight line whose direction is $(0,-3,1)$.

- **حساب صورة** f. نأخذ

Calculating the image of f***.*** *We take* $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (x',y') = f(x,y,z) &\iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& x' \\ y+3z &=& y' \end{array} \right. \end{aligned}$$

نستطيع أخذ المثال

We can take an example

$$x = -\frac{x'}{2}, y' = y, z = 0.$$

الخلاصة:

Conclusion:

$$\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f\big(-\frac{x'}{2}, y', 0\big) = (x',y')$$

ومنه $Im(f) = \mathbb{R}^2$ و هذا مايثبت أن التطبيق f غامر.

Then $Im(f) = \mathbb{R}^2$, which proves that the application f is surjective.

3.1.4 : Example - مثال

لنكن $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. وليكن النطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ المعرف كما يلي $f(X) = AX$. ومنه :

Let $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ and let the linear application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ defined as $f(X) = AX$. Then:

$$Ker(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$$

وبالنالي فإن $X \in \mathbb{R}^p$ هي مجموعة الحلول للجملة الخطية المنجانسة $AX = 0$.

Thus $X \in \mathbb{R}^p$ is the set of solutions of the homogeneous linear system $AX = 0$.

سوف نرى في المحور القادم أن $Im(f)$ هي الفضاء الشعاعي المولد من أعمدة المصفوفة A.

We will see in the next chapter that $Im(f)$ is the vector space generated from the columns of the matrix A.

5.1.4 : Proposition - قضيــة

ليكن E و F فضاءان شعاعيان و f نطبيق خطي من E نحو F. يكون النطبيق f :

Let E and F be two vector spaces and f a linear application from E to F. The application f is:

- غامرا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Im}(f) = F$،
- منبابنا إذا وفقط إذا كان $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Surjective if and only if $\mathrm{Im}(f) = F$,

Injective if and only if $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

1.1.4 : Corollary - نتيجة

ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منئه و f نطبيق خطي من E نحو F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces and f be a linear application defined from E to F.

- إذا كان f غامر فإن

If f is surjective then

$$\dim(E) \geqslant \dim(F).$$

- إذا كان f متباين فإن

If f is injective then

$$\dim(E) \leqslant \dim(F).$$

- إذا كان f تقابلي فإن

If f is bijective then

$$\dim(E) = \dim(F).$$

وبالتالي فإن البعد هو شرط قوي على طبيعة التطبيقات الخطية. يمكننا أيضا رؤية هذا الشرط على النحو التالي.

Thus dimension is a strong requirement on the nature of linear applications. We can also see this condition as follows.

1.1.4 : Theorem - نظرية

ليكن E و F فضاءان شعاعيان ذو بعد منته و f تطبيق خطي من E نحو F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces and f be a linear application of E to F.

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)\ .$$

2.4 الشكل المصفوفي *Matrix form*

ليكن E و F فضائين شعاعيين ذوات البعد المنته، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن p بعد الفضاء من E و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس لـ E. ليكن n بعد الفضاء F و $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ أساس لـ F. و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces on the field $\mathbb{K}$ and let p be the dimension of the space of E and $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ is a basis for E. Let n be the dimension of the space F and $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ be the basis of F. Let $f : E \to F$ be a linear application.

تسمح لنا خصائص التطبيقات الخطية بين فضائين ذات أبعاد منتهية أن نذكر ما يلي:

The properties of linear applications between two spaces of finite dimensions allow us to state the following:

- **يتم تحديد التطبيق الخطية f بشكل فريد من خلال صورة الأساس E ، ومن ثم بواسطة الأشعة** $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

The linear application f is uniquely determined by the basis image of E, and hence by the rays $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

- **من أجل كل** $j \in \{1, \dots, p\}$، $f(e_j)$ **هو شعاع من** F **مكتوب بشكل فريد كمزج خطي في أشعة الأساس** $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ **من** F. **و منه يوجد عدد** n **من السلميات الوحيدة** $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ **(وقد يرمز لها ايضا** $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$**) حيث:**

For each $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j)$ is a vector from F uniquely written as a linear mixture in the basis rays $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ from F. Then, there are n single scalers $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ (which may also be denoted as $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$) where:

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{nj}f_n = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

وبالتالي، فإن التطبيق الخطي f يتم تحديده بالكامل بواسطة المعاملات $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. **لذلك من الطبيعي إعطاء التعريف التالي:**

Thus, the linear application f is entirely determined by the coefficients $(a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. So it is natural to give the following definition:

4.2.4 : Definition - تعريف

مصفوفة التطبيق الخطية f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ حيث يتكون العمود j من إحداثيات الشعاع $f(e_j)$ في الأساس $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

The matrix of the linear application f with respect to the basis $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ is the matrix $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ where the column j consists primarily of the coordinates of the ray $f(e_j)$ in the basic $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{matrix} \\
\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}
\end{array}$$

بعبارات أبسط: مصفوفة تطبيق خطي هي المصفوفة التي أعمدتها هي صورة f لأشعة أساس فضاء البدء $\mathcal{B}$ ، معبرا عنها في أشعة أساس فضاء الوصول $\mathcal{B}'$. نرمز لهته المصفوفة بالرمز $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

In simpler terms: a linear application matrix is a matrix whose columns are an image f of the basis rays of the start space $\mathcal{B}$, expressed in basis rays of the arrival space $\mathcal{B}'$. We denote this matrix by $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

2.2.4 : Remark - ملاحظة

- مرتبة المصفوفة $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يتعلق فقط ببعد الفضاء E وبعد الفضاء F.

The range of the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ relates only to the dimension of space E and the dimension of space F.

- من ناحية أخرى ، تعتمد معاملات المصفوفة على اختيار الأساس $\mathcal{B}$ من E وإلى الأساس $\mathcal{B}'$ من F.

On the other hand, the matrix coefficients depend on the choice of basis $\mathcal{B}$ from E and to basis $\mathcal{B}'$ from F.

4.2.4 : Example - مثال

ليكن f التطبيق الخطي والمعرف من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ كما يلي:

Let f be the linear application of $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ defined as follows:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 - x_2 - 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

من المستحسن تحديد أشعة الأسطر وأشعة الأعمدة، وبالتالي يمكن اعتبار f بمثابة التطبيق

It is desirable to specify line rays and column rays, and thus f can be considered as the application

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

لیكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$. أي :

Let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ be the canonical basis for $\mathbb{R}^3$ and $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ the canonical basis for $\mathbb{R}^2$. So :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) إيجاد مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$

Finding the linear application matrix f in the basis $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$

We have — A) لدينا

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2,$$

It is the first column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ وهو أول عمود في المصفوفة

and — B) و

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 2) = -f_1 + 2f_2,$$

the second column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ثاني عمود في المصفوفة

And finally — C) و أخيرا

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-2, 3) = -2f_1 + 3f_2$$

the third and last column in the matrix $\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ثالث وآخر عمود في المصفوفة

therefore: — و بالتالي:

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) سنقوم الآن بتغيير أساس فضاء البدأ و أساس فضاء الوصول بأساس جديد لكل من الفضائين، حسب مايلي:

We will now change the basis of the start space and the basis of the arrival space with a new basis for each of the two spaces, according to the following:

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نقوم الآن بحساب مصفوفة التطبيق الخطي الجديدة أي في الأساس $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ من $\mathbb{R}^3$ و $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ من $\mathbb{R}^2$

Now, we calculate the matrix of the new linear transformation with basis $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ *From* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathcal{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ *from* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1) &= f(1,1,0) = (0,3) = -3\phi_2, \\ f(\epsilon_2) &= f(1,0,1) = (-1,4) = -\phi_1 - 5\phi_2, \\ f(\epsilon_3) &= f(0,1,1) = (-3,5) = -3\phi_1 + 2\phi_2, \end{aligned}$$

then　　　　و منه

$$\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

هذا المثال يوضح حقيقة أن مصفوفة التطبيق الخطي تعتمد فعلا على اختيار الأساسات.

This example illustrates the fact that the linear application matrix actually depends on the choice of basis.

5.2.4 : Example - مثال

Let the application defined from $\mathbb{R}^2$ *to* $\mathbb{R}^3$*:*　　　　ليكن التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^3$:

$$f\ : (x,y) \longmapsto (x+y,\ 2x+3y,\ x-y)\ .$$

الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^2$ هو $((1,0),(0,1))$. صورة هذه الأشعة هي

The canonical basis of $\mathbb{R}^2$ *is* $((1,0),(0,1))$*. The image of this x-ray is:*

$$f((1,0)) = (1,2,1) \text{ and } f((0,1)) = (1,3,-1).$$

ومنه مصفوفة التطبيق f هي

Hence the application matrix of f is

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

لنأخذ أساس آخر للفضاء $\mathbb{R}^2$ الأشعة $((1,1),(1,-1))$ من فضاء البدء و أساس لـ $\mathbb{R}^3$ الأشعة $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ عند فضاء الوصول. ومنه صورة أشعة أساس فضاء لبدء هي

Let's consider another basis for the space $\mathbb{R}^2$: rays $((1,1),(1,-1))$ from the starting space and a basis for $\mathbb{R}^3$: rays $((1),0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ from the destination space. The image of the basis rays in the starting space is.

$$\begin{aligned} f((1,1)) &= (2,5,0) = -3(1,0,0) + 5(1,1,0) + 0(1,1,1) \\ f((1,-1)) &= (0,-1,2) = 1(1,0,0) - 3(1,1,0) + 2(1,1,1) \end{aligned}$$

ومنه المصفوفة هي:

then the matrix is:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.4 : Remark - ملاحظة

عندما يكون فضاء الوصول وفضاء البدء هي نفسها (التطبيق عبارة عن أندومورفيزم)، نختار نفس الأساس عند البدء و الوصول. تحتوي مصفوفة التشاكل الذاتي حينها على نفس عدد الأسطر و الأعمدة: وتكون المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي مربعة.

When the destination space and the starting space are the same (the transformation is an endomorphism), we choose the same basis for both the start and the destination. The resulting matrix of the self-mapping then has the same number of rows and columns, making the matrix of the linear transformation square.

3.4 تغيير الأسس *Change of basis*

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته وليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ أساس لـ E. من أجل كل $x \in E$ يوجد p-مضاعفة $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ وحيدة من $\mathbb{K}$ حيث:

Let E be a finite-dimensional vector space and let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ be the basis of E. For every $x \in E$ there exists a unique p-multiple $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ of $\mathbb{K}$ where:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

مصفوفة إحداثيات x هو شعاع عمود ، يرمز له بالرمز:

The coordinate matrix x is a column vector, denoted by:

$$\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{أو} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

في المجموعة $\mathbb{R}^p$ إذا كان $\mathcal{B}$ هو الأساس القانوني فنكتب الشعاع على هذا الشكل البسيط

In the set $\mathbb{R}^p$, if $\mathcal{B}$ is the canonical basis, then we write the vector in this simple form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

without showing the basis.

دون اظهار الأساس.

ليكن E و F فضائين شعاعيين منتهيا البعد، على الحقل $\mathbb{K}$ و ليكن $f : E \to F$ تطبيق خطي. و لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس لـ F.

Let E and F be finite-dimensional vector spaces, on the field $\mathbb{K}$ Let $f : E \to F$ be a linear application. Let $\mathcal{B}$ be the basis of E and $\mathcal{B}'$ be the basis of F.

6.3.4 : Proposition - قضية

- لتكن $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Let $A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

- من أجل كل $x \in E$ نضع *For every $x \in E$ we set*

$$X = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

- من أجل كل $y \in F$ نضع *For every $y \in F$ we set*

$$Y = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

ومنه إذا كان لدينا $y = f(x)$ فإنه يمكن كتابة *Hence, if we have $y = f(x)$, it can be written*

$$\boxed{Y = AX}$$

بصفة أخرى : *In other words:*

$$\boxed{\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(f(x)\big) = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

6.3.4 : Example - مثال

ليكن E فضاء شعاعي ذو البعد المنته 3، على الحقل $\mathbb{R}$ و $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ أساس لـ E. وليكن التماثل الذاتي (الأندومورفيزم) f من E حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

Let E be a vector space with finite dimension 3, on the field $\mathbb{R}$ and $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ is a basis for E. Let the endomorphism f of E, where its matrix in basis $\mathcal{B}$ is:

$$A = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

نقترح أولا تحديد نواة وصورة f. نعلم أن كل العناصر x من E هي مزج خطي لـ (e_1, e_2, e_3)

We first propose to define a kernel and an image f. We know that all elements x of E are linear mixtures of (e_1, e_2, e_3)

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

we have لدينا .

$$\begin{aligned} x \in \boldsymbol{Ker}(f) &\iff f(x) = 0_E \iff \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

After solving the system we find: بعد حل الجملة نجد:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ker}(f) &= \big\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \ \text{and} \ x_2 + x_3 = 0\big\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

لذلك فإن النواة لها البعد 1. و باستعمال نظرية النواة والصورة نجد بعد $\boldsymbol{Im}(f)$ هو 2. نأخذ أول شعاعين في المصفوفة A مستقلين خطيا لتوليد الفضاء $\boldsymbol{Im}(f)$:

Therefore the kernel has dimension 1. Using kernel and image theory, we find that the dimension of $\boldsymbol{Im}(f)$ is 2. We take the first two vectors in the matrix A to be linearly independent to generate the space $\boldsymbol{Im}(f)$:

$$\boldsymbol{Im}(f) = \boldsymbol{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right).$$

1.3.4 مصفوفة العبور Transit matrix

لنفرض أن E فضاء شعاعي ذو بعد منته n. حسب ما سبق نعلم أن جميع أساسات الفضاء E تحتوي على n عنصر.

Let E be a vector space with finite dimension n. According to the above, we know that all basis of the space E contain n elements.

5.3.4 : Definition - تعريف

لتكن $\mathcal{B}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}'$ أساس آخر لـ E.

Let $\mathcal{B}$ be the basis of E and $\mathcal{B}'$ be another basis for E.

نسمي مصفوفة عبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ المصفوفة المربعة ذات الرتبة $n \times n$ حيث العمود j مشكلا من الشعاع j للأساس $\mathcal{B}'$، بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

We call the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the basis $\mathcal{B}'$ denoted by $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ The square matrix of rank $n \times n$ where the column j formed by the vector j of the basis $\mathcal{B}'$, with respect to the basis $\mathcal{B}$.

و قد نرمز أحيانا للمصفوفة $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ بالرمز $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

We may sometimes denote the matrix $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ by $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

7.3.4 : Example - مثال

Let the real vector space $\mathbb{R}^2$ and let لتكن الفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^2$. ولتكن

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

نعتبر الأساس $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ و الأساس $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

We consider the basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ and the basis $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

Finding the transit matrix from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$.

يجب أن نعبر عن ϵ_1 و ϵ_2 بدلالة (e_1, e_2). نجد:

We must express ϵ_1 and ϵ_2 in terms of (e_1, e_2). We find:

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

The transit matrix is then: مصفوفة العبور هي إذن :

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

يمكن أن نعتبر مصفوفة العبور على أنها المصفوفة المرافقة للتطبق الخطي المحايد $\mathbf{I}_E$ المعرف على E.

We can regard the transit matrix as the associate matrix of the neutral linear application $\mathbf{I}_E$ defined on E.

7.3.4 : Proposition - قضية

مصفوفة العبور $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق المحايد $\boldsymbol{I}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ حيث E هي فضاء المبدأ المزود بالأساس $\mathcal{B}'$، و E فضاء الوصول المزود بالأساس $\mathcal{B}$:

Transit matrix $\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$ is the associate matrix of a natural linear application $\boldsymbol{I}_E : (E,\mathcal{B}') \to (E,\mathcal{B})$ where E is the starting space provided by the basis $\mathcal{B}'$, and E is the destination space provided by the basis $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\boldsymbol{I}_E)}$$

لكن لو عكسنا وضعية الأساسات سوف نجد مايلي:

8.3.4 : Proposition - قضية

1) **مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$ عكوسة ومقلوبها هو مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}'$ إلى الأساس $\mathcal{B}$:**

Transit matrix from basis $\mathcal{B}$ to basis $\mathcal{B}'$ its invertible and its inverse is the transit matrix from the basis $\mathcal{B}'$ to the basis $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

2) **إذ كان $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}''$ ثلاث أساسات فإن** — *If $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ and $\mathcal{B}''$ are three basis, then*

$$\boxed{\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$$

8.3.4 : Example - مثال

لتكن $E = \mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}$ ولنعرف

Let $E = \mathbb{R}^3$ be provided with the canonical basis $\mathcal{B}$ and we define

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

إيجاد مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$.

Finding the transit matrix from basis $\mathcal{B}_1$ to basis $\mathcal{B}_2$.

We have: لدينا:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

The previous proposition is equivalent to: القضية السابقة تكافئ:

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$$

then we find ومنه نجد .

$$\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$$

After calculating the inverse of $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ we find: بعد حساب المقلوب $\boldsymbol{Pass}^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ نجد : .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

سنقوم الآن بدراسة تأثير تغيير الأسس على مُركبات الأشعة.

We will now study the effect of changing bases on ray compounds

- ليكن $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ و $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ أساسين لنفس الفضاء الشعاعي E.

Let $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ and $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ be two basis of the same vector space E.

- ليكن $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

Let $\mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ be the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the basis $\mathcal{B}'$.

- من أجل $x \in E$ فإنه يمكن كتابته كجملة خطية من الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ في الأساس $\mathcal{B}$ و نكتب:

For $x \in E$ it can be written as a linear system of the form $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ in the base $\mathcal{B}$ and we write:

$$X = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

.

- نفس العنصر $x \in E$ يمكن كتابته أيضا كجملة خطية من الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ في الأساس $\mathcal{B}'$ و نكتب :

The same element $x \in E$ can also be written as a linear system of the form $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ in the base $\mathcal{B}'$ and we write:

$$X' = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

.

9.3.4 : Proposition - قضية

$$\boxed{X = \boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot X'}$$

2.3.4 صيغة تغيير الأساس Base change formula

- ليكن $f : E \to E$ تطبيق خطي. $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ أساسين لـ E و $P = \mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ مصفوفة العبور من الأساس $\mathcal{B}$ إلى الأساس $\mathcal{B}'$.

Let $f : E \to E$ be a linear application. $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ are two basis of E and $P = \mathbf{Pass}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ the transit matrix from the basis $\mathcal{B}$ to the base $\mathcal{B}'$.

- لتكن $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}$ و $B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ مصفوفة التطبق الخطي f في الأساس $\mathcal{B}'$.

Let $A = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ be the matrix of the linear application f in the basis $\mathcal{B}$ and $B = \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ the matrix of f in the basis $\mathcal{B}'$.

نظرية تغيير الأساس تكون كالآتي:

The basis change theory is as follows:

2.3.4 : Theorem - نظرية

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

و بصفة عامة من أجل كل $n \geq 1$ *in general for every* $n \geq 1$

$$\boxed{B^n = P^{-1}A^nP}$$

9.3.4 : Example - مثال

ليكن الأساسان التاليان من $\mathbb{R}^3$: *Let given the following bases of* $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

و ليكن $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التطبيق الخطي حيث مصفوفته في الأساس $\mathcal{B}_1$ هي :

Let $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ be the linear application whose matrix in the base $\mathcal{B}_1$ is:

$$A=\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)=\begin{pmatrix}1&0&-6\\-2&2&-7\\0&0&3\end{pmatrix}$$

إيجاد مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}_2$، $B=\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$:

Finding a matrix of f in the basis $\mathcal{B}_2$, $B=\boldsymbol{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$:

- بحساب مصفوفة العبور سابقا من الأساس $\mathcal{B}_1$ إلى الأساس $\mathcal{B}_2$ فوجدنا

By previously calculating the transit matrix from the basis $\mathcal{B}_1$ to the basis $\mathcal{B}_2$, we find

$$P=\boldsymbol{Pass}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

- نحسب

we calculate

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&5\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

- نطبق صيغة تغيير الأساسات من النظرية السابقة نجد :

Applying the basis change formula from the previous theorem we find:

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&5\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&-6\\-2&2&-7\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

غالبا ما يكون من مصلحة التغييرات في الأساسات أن يتم اختزالها إلى مصفوفة أبسط (مصفوفة قطرية أو مثلثية علوية أو سفلية). على سبيل المثال هنا، من السهل حساب قوة المصفوفة B^k لإستنتاج A^k منها.

It is often in the interest of changes in foundations to be reduced to a simpler matrix (an upper or lower diagonal or triangular matrix). For example here, it is easy to calculate the power of the matrix B^k to deduce A^k from it.

4.4 سلسلة التمارين رقم *Exercise series N° 4*

تمرين رقم – Exercise N°– 1

حدد إذا كانت التطبيقات التالية عبارة عن تطبيقات خطية أم لا:

Determine whether the following applications are linear applications or not:

(1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y,\ \ x - 2y, 0)$

(2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y,\ \ x - 2y, 1)$

(3 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$

الحـــل : Solution

(1 ليكن f تطبيق خطي. نأخذ $u = (x, y)$ و $v = (x', y')$ في $\mathbb{R}^2$، و $\lambda \in \mathbb{R}$. ومنه

$$\begin{aligned} f(u + v) &= \big((x + x') + (y + y'), (x + x') - 2(y + y'), 0\big) \\ &= \big(x + y, x - 2y, 0\big) + (x' + y', x' - 2y', 0\big) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

كذلك،

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x + y, x - 2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

(2 f : ليست تطبيق خطي لأن $f\big((0, 0)\big) \neq (0, 0, 0)$

(3 f ليست تطبيق خطي لأن،

$$f\big((1, 0)\big) = 1,\ f\big((-1, 0)\big) = 1 \quad \text{و} \quad f\big((0, 0)\big) = 0 \neq f\big((1, 0)\big) + f\big((-1, 0)\big).$$

تمرين رقم – Exercise N°– 2

ليكن التطبيق الخطي $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف: *Let the linear application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *be defined*

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

أوجد نواة التطبق الخطي f، و صورته. و هل هو متباين؟ غامر؟

Find the kernel of the linear application f, and its image. And is it injective? surjective?

Solution : الحــل

1) إيجاد نواة التطبيق الخطي f .

$$Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (0,0,0)\}.$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $Ker(f) = (0,0)$.

2) بما أن $Ker(f) = (0,0)$، حسب النظرية فإن f متباين.

3) إيجاد صورة التطبيق الخطي f. ليكن (u,v,w) شعاع من $\mathbb{R}^3$. نقول أن (u,v,w) من مجموعة صور التطبق الخطي f إذا وفقط إذا كان:

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (u,v,w) = f(x,y) \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \\ w &= x+y \end{cases}$$

$$\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u &= x+y \\ u+v &= 2x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} &= y \\ \frac{u+v}{2} &= x \\ w-u &= 0 \end{cases}$$

نستنتج أن

$$Im(f) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3;\ u-w = 0\}.$$

بصفة خاصة، $(1,1,0)$ لا ينتمي للمجموعة $Im(f)$، ومنه f ليس غامر.

Exercise N°– 3 – تمرين رقم

Let the linear application $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ be defined ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ المعرف:

$$f(x,y,z)=(x+z,\quad y-x,\quad z+y,\quad x+y+2z).$$

1) أوجد أساسا لـ $Im(f)$. — *Find a basis for $Im(f)$.*

2) أوجد أساسا لـ $Ker(f)$. — *Find a basis for $Ker(f)$.*

3) هل f متباين؟ غامر؟ تقابلي؟ — *Is f injective? Surjective? Bijective?*

Solution : الحـل

1) نستعمل تعريف التطبيق الخطي f نجد:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,-1,0,1)\\ f(e_2) &= (0,1,1,1)\\ f(e_3) &= (1,0,1,2)\end{aligned}$$

يمكن أن نلاحظ أن:

$$f(e_3)=f(e_1)+f(e_2)$$

أي أن الأشعة $\{f(e_1),f(e_2),f(e_3)\}$ مرتبطة خطيا، كما نعلم أن الأشعة $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ مولدة لـ $Im(f)$ ومنه $Im(f)$ مولدة من $\{f(e_1),f(e_2)\}$ وهي تكون أساس لها.

2) لدينا

$$(x,y,z)\in\ker(f)\iff\left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0\\ -x+y &=& 0\\ y+z &=& 0\\ x+y+2z &=& 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0\\ y+z &=& 0\\ y+z &=& 0\\ y+z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z\\ y &=& -z\\ z &=& z\end{array}\right.$$

نستنتج أن الشعاع $(-1,-1,1)$ يولد $Ker(f)$ نظراً لأنه غير معدوم، فهو أساس $Ker(f)$ ومنه

$$\dim(Ker(f)) = 1.$$

3) **حسب نظرية النواة والصورة فإن التطبيق f ليس غامر لأن النواة ذات البعد 1 في حين بعد $Im(f)$ لا يساوي 3 لأن**

$$Im(f) = Vect\{f(e_1), f(e_2)\} \Longrightarrow \dim(Im(f)) = 2.$$

Exercise N°– 4 – تمرين رقم

حدد ما إذا كان التطبيق f_i خطيا أم لا :

Determine whether the application f_i is linear or not:

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad & f_1(x,y) = (2x+y, x-y)\\
f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad & f_2(x,y,z) = (xy, x, y)\\
f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad & f_3(x,y,z) = (2x+y+z, y-z, x+y)\\
f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad & f_4(x,y) = (y, 0, x-7y, x+y)\\
f_5 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \quad & f_5(P) = \big(P(-1), P(0), P(1)\big)
\end{aligned}$$

Solution : الحــل

1) f_1 **تطبيق خطي. ليكن** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **و** $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
f_1\big((x,y)+(x',y')\big) &= f_1\big(x+x', y+y'\big)\\
&= \big(2(x+x')+(y+y'), (x+x')-(y+y')\big)\\
&= \big(2x+y+2x'+y', x-y+x'-y'\big)\\
&= \big(2x+y, x-y\big) + \big(2x'+y', x'-y'\big)\\
&= f_1(x,y) + f_1(x',y')
\end{aligned}$$

ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **و** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f_1\big(\lambda\cdot(x,y)\big) = f_1\big(\lambda x, \lambda y\big) = \big(2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y\big) = \lambda\cdot\big(2x+y, x-y\big) = \lambda\cdot f_1(x,y).$$

2) f_2 **ليس تطبيق خطي على سبيل المثال** $f_2(1,1,0)+f_2(1,1,0)$ **ليست مساوية لـ** $f_2(2,2,0)$.

3) f_3 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y,z) و (x',y',z') أن

$$f_3\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z')$$

. بعدها من أجل (x,y,z) و λ لدينا $f_3\big(\lambda\cdot(x,y,z)\big)=\lambda\cdot f_3(x,y,z)$.

4) f_4 تطبيق خطي : نتحقق من أجل (x,y) و (x',y') أن

$$f_4\big((x,y)+(x',y')\big) = f_4(x,y)+f_4(x',y').$$

بعدها، ومن أجل (x,y) و λ لدينا $f_4\big(\lambda\cdot(x,y)\big)=\lambda\cdot f_4(x,y)$.

5) f_5 تطبيق خطي : لتكن $P,P'\in\mathbb{R}_3[X]$ فإن

$$\begin{aligned}
f_5\big(P+P'\big) &= \big((P+P')(-1),(P+P')(0),(P+P')(1)\big)\\
&= \big(P(-1)+P'(-1),P(0)+P'(0),P(1)+P'(1)\big)\\
&= \big(P(-1),P(0),P(1)\big)+\big(P'(-1),P'(0),P'(1)\big)\\
&= f_5(P)+f_5(P')
\end{aligned}$$

و إذا كان $P\in\mathbb{R}_3[X]$ و $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_5\big(\lambda\cdot P\big) &= \big((\lambda P)(-1),(\lambda P)(0),(\lambda P)(1)\big)\\
&= \big(\lambda\cdot P(-1),\lambda\cdot P(0),\lambda\cdot P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot\big(P(-1),P(0),P(1)\big)\\
&= \lambda\cdot f_5(P)
\end{aligned}$$

Exercise N°– 5 – تمرين رقم

ليكن التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ المعرف:

Let the linear application be $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ defined as:

$$f(x,y,z)=(-3x-y+z,\quad 8x+3y-2z,\quad -4x-y+2z).$$

1) أوجد أساس لنواة التطبيق f وأحسب بُعدها.

Find a basis for the kernel of application f and calculate its dimension.

2) هل التطبيق f متباين؟ *Is the application f injective?*

3) أوجد رتبة f. هل التطبيق f غامر؟ *Find the range of f. Is the application f surjective?*

4) أوجد أساس لـ $Im(f)$. *Find a basis for $Im(f)$.*

Solution : الحـــل

1) ليكن $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. لدينا $(x,y,z)\in ker(f)$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} -3x & - & y & + & z & = & 0 \\ 8x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -4x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z & - & y & - & 3x & = & 0 \\ -2z & + & 3y & + & 8x & = & 0 \\ 2z & - & y & - & 4x & = & 0 \end{cases}$$

ثم ، بإضافة (إزالة على التوالي) ضعف السطر الأول إلى الثاني (على التوالي الثالث)، نجد:

$$\begin{cases} z & -y & - & 3x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \\ & y & + & 2x & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z & & -x & = & 0 \\ & y & +2x & = & 0 \end{cases}.$$

وبالتالي $(x,y,z)\in ker(f)$ إذاوفقط إذا كان (x,y,z) حل هذه الجملة أي:

$$(x,y,z)=(x,-2x,x)=x(1,-2,1).$$

ومنه نأخذ كأساس لنواة التطبق f الشعاع $(1,-2,1)$ أي الأساس يتكون من عنصر واحد يعني $\dim(ker(f))=1$.

2) النواة لا تتطابق مع الفضاء المعدوم $\{0\}$ ومنه f ليس متباين.

3) حسب نظرية الرتبة لدينا:

$$rg(f)=3-\dim(ker(f))=3-1=2.$$

التطبيق f ليس غامر : لأن بُعد فضاء الصورة يساوي 2 يختلف عن فضاء الوصول الذي هو $\mathbb{R}^3$ ذو البُعد 3.

4) إيجاد فضاء الصور للتطبيق f. لدينا:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x(-3,8,-4)+y(-1,3,-1)+z(1,-2,2)\ :\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= vect(u_1,u_2,u_3), \end{aligned}$$

حيث نضع $u_1 = (-3, 8, -4)$، $u_2 = (-1, 3, -1)$ و $u_3 = (1, -2, 2)$. من السؤال السابق فإن رتبة التطبيق f هي 2. من جهة أخرى الجملة (u_1, u_2) مستقلة خطيا فهي تشكل أساس لـ $Im(f)$.

Exercise N°– 6 – تمرين رقم

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^3$ حيث مصفوفته في الأساس القانوني (e_1, e_2, e_3) معرفة كما يلي:

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^3$ whose matrix in the canonical basis (e_1, e_2, e_3) is defined as follows:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

أثبت أن الأشعة

Prove that the vectors

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس.

form a basis for the space $\mathbb{R}^3$, then find the matrix f with respect to this basis.

Solution : الحـــل

نرمز بـ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ للأساس القديم و للأساس الجديد بـ $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. لتكن P مصفوفة العبور التي أعمدتها هي مركبات الأشعة التي تنتج من التعبير عن مركبات أشعة الأساس الجديد $\mathcal{B}'$ بدلالة الأساس القديم $\mathcal{B}$ نجد:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نتحقق أن P عكوسة، وبحساب مقلوبها نجد أن $\mathcal{B}'$ يشكل أساس، بالإضافة إلى ذلك :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ نحسب } B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B هي مصفوفة التطبيق f في الأساس $\mathcal{B}'$.

Exercise N°– 7 – تمرين رقم

ليكن التشاكل الذاتي f من $\mathbb{R}^2$ حيث مصفوفته

Let the ondomorphism f of $\mathbb{R}^2$ where its matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

on the canonical basis, so let في الأساس القانوني، وليكن

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ and } e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1) أثبت أن $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$ ثم أوجد المصفوفة $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

Prove that $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ is a basis for the space $\mathbb{R}^2$ and then find the matrix $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

2) أحسب A^n من أجل $n \in \mathbb{N}$.

Calculate A^n for $n \in \mathbb{N}$.

3) حدد مجموعة المتتاليات الحقيقية التي تحقق:

Determine the set of real sequences that satisfy:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3} y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2} x_n - \frac{2}{3} y_n \end{cases}$$

Solution : الحـــل

1) نضع P مصفوفة العبور من الأساس القانوني $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ نحو الأساس $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$.
مكونة من أشعة الأعمدة e_1 و e_2 :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$ ومنه P عكوسة وبالتالي $\mathcal{B}'$ أساس.

ومنه مصفوفة f في الأساس $\mathcal{B}'$ هي :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) من السهل جدا حساب قوة مصفوفة قطرية :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

بما أن $A = PBP^{-1}$ نستنتج بعدها A^n :

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

3) إذا وضعنا $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ومنه المعادلات التي تحقق هته المتتاليات تكتب على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$X_{n+1} = AX_n.$$

إذا وضعنا الشرط الإبتدائي $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ فإن: $X_n = A^nX_0$. ونستنتج أن:

$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4}\Big((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0\Big) \\ y_n &= \frac{1}{4}\Big((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0\Big). \end{cases}$$

المصادر

[1] Allab, K. Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle O.P.U., 1986.

[2] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 1: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[3] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Les mathématiques en Licence, 1ére. Tome 2: Cours+ exos, MIAS. MASS. SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[4] Azouly, E., Avignant, J. Auliac, G. Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[5] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1993.

[6] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1990.

[7] Bayart, F. Bibmath.net, https://www.bibmath.net/

[8] Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

[9] Exo7 Cours et exercices de mathématiques, http://exo7.emath.fr/un.html

[10] Godement, R. Cours d'algèbre. Hermann, 1966.

[11] Grifone, J. Algèbre linéaire. Cépaduès Éditions, Toulouse, 2011. 4e édition.

[12] Hitta, A. Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

[13] Liret, F., Martinais, D. Algèbre 1re année. Dunod, 2003. 2e édition.

[14] Mortad, M. H. Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair" (Alger-Algérie), 2012.

[15] Pierre, G. Matrices, géométrie, algèbre linéaire. Nouvelle bibliothèque mathématique.

Cassini, 2001. Traduction de Gabrielle Arnaudiès.

[16] Queysanne, M. Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[17] محمد حازي 2017 بوابة التحليل التفاضلي، الدوال ذات عدة متغيرات دروس مبسطة وتمارين منوعة. منشورات المجلس الأعلى للغة العربية، ديدوش مراد الجزائر.

[18] سعود محمد و بن عيسى لخضر، 2009 التحليل الرياضي جزء 1 ، ديوان المطبوعات الجامعية.

[19] قادة علاب 2010 عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول عناصر من التحليل الرياضي (التوابع لمتغير حقيقي واحد) الجزء الأول. ديوان المطبوعات الجامعية.

Brahim Brahimi. Full professor in Mathematical Statistics affiliated to the laboratory of Applied Mathematics. Have a Ph.D. in Mathematical Statistics (2011), University Mohamed Khider, Biskra, Algeria. Technical Editor in Chief of Afrika Statistika Journal. Have a master and advanced Studies Diploma in Probability, Statistics and Optimizations (2003), University Badji Mokhtar, Annaba, Algeria. His research interests are in non-parametric statistics, statistical inference for incomplete data, rare events and applications to finance and insurance, extreme value theory and actuarial risk measures, copula modeling and multivariate statistics. He has published research articles in different international reputed journals of mathematics.